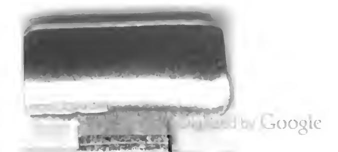
Lehrbuch der psychologisc... methodik

Alfred Georg Ludvig Lehmann





Lehrbuch der psychologischen Methodik.

Lehrbuch

der

psychologischen Methodik.

Von

Alfr. Lehmann
(Kopenhagen).



Leipzig,
O. R. Reisland.
1906.

Vorwort.

Das Erscheinen des vorliegenden Büchleins ist durch die beiden folgenden Umstände veranlaßt.

Erstens besitzen die Studierenden, die sich an den Arbeiten der psychologischen Laboratorien beteiligen, gewöhnlich nur elementäre mathematische Kenntnisse, und die in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegebene Darstellung der Prinzipien der Fehlerausgleichung ist ihnen folglich unzugänglich. Ich habe es deshalb versucht, diese Prinzipien so weit auseinanderzusetzen, wie es ohne Anwendung der Infinitesimalrechnung möglich ist, und das Hauptgewicht auf die praktische Ausführung der Berechnungen gelegt. Tatsächlich braucht man ja gar nicht die mathematische Begründung der Methoden zu kennen, um sie in praxi anwenden zu können; eine Darstellung, die das Wie angibt, ohne durch das sehr weitläufige Warum getrübt zu werden, wird also wohl den meisten Studierenden nicht unwillkommen sein.

Zweitens haben meine Arbeiten auf dem Gebiete der messenden Psychologie mich in den letzten Jahren zu der Überzeugung geführt, daß man hier bisher bei der Fehlerausgleichung von einer falschen Voraussetzung ausgegangen ist. Es wird fast immer ohne nähere Untersuchung angenommen, daß außer den konstanten Fehlern nur zufällige Fehler, das Gaußsche Gesetz befolgend, vorkommen. Aller Wahrscheinlichkeit nach haben wir aber bei den psychologischen Messungen wegen variabler Fehler in den allermeisten Fällen mit unsymmetrischen Fehlerstreuungen zu tun. Eine Darstellung des praktischen Verfahrens, wie man in solchen Fällen mittels der Interpolationsrechnung das Dichtigkeitsmittel, den wahrscheinlichen Wert der gemessenen Größe, berechnen kann, findet man meines Wissens in keinem Lehrbuche, und meine Arbeit wird wohl daher auch vielen Psycho-

logen nützlich sein können. Die vielseitige Anwendung der Interpolationsrechnung hat übrigens zu einer eingehenderen Darlegung geführt, als sie in den meisten Lehrbüchern zu finden ist.

Warum ich mich nicht auf eine Behandlung der psychophysischen Methodik beschränkt, sondern eine vollständige psychologische Methodik darzustellen versucht habe, wird sofort aus dem Buche hervorgehen. Selbstverständlich wird ein solcher erster Versuch nicht ohne Mängel sein; einige Methoden sind wahrscheinlich zu breit, andere zu kurz behandelt, andere wiederum, die methodologisch noch nicht genügend durchgearbeitet sind, fehlen vollständig. Außerdem können gewiß mit Recht Einwände gegen die systematische Ordnung der verschiedenen Methoden erhoben werden; die Zeitmessung z. B. kann ebensowohl eine Methode der Urteilsfindung, als eine Ausdrucksmethode genannt werden. Hoffentlich wird aber durch solche Umstände die Anwendbarkeit des Buches nur wenig beeinträchtigt.

Herrn Mag. scient. R. H. Pedersen sage ich hier meinen Dank für zahlreiche praktische Anweisungen und für die sorgfältige und mühevolle Prüfung der aufgestellten Formeln.

Kopenhagen, im Juli 1906.

Alfr. Lehmann.

Inhalt.

Seite

B. Die Methode der Urteilsfindung.

C. Die Ausdruckmethoden.

Einleitung.

1. *Die Aufgaben der psychologischen Methodik.* In der Psychologie bieten sich uns zahlreiche Probleme dar, deren Lösung quantitative Bestimmungen erfordert. Es ist die Aufgabe der psychologischen Methodik, anzugeben, wie solche Messungen anzustellen und wie die sich daran schließenden Berechnungen durchzuführen sind. In den früheren, nicht eben zahlreichen Darstellungen dieses Gegenstandes[1]) ist die Aufgabe indessen viel enger gefaßt, indem man sich auf die Behandlung der psychophysischen Methodik, d. h. der Methodik der Empfindungsmessung, beschränkt hat. Es werden dann im ganzen nur vier Aufgaben behandelt, nämlich die Bestimmung der absoluten und die der Unterschieds-Schwellen, die Bestimmung äquivalenter Reize und diejenige gleich erscheinender Reizunterschiede. Man wird wohl aber kaum einen triftigen Grund für eine solche Beschränkung des Umfanges der Methodik angeben können. Die Meßbarkeit der psychischen Erscheinungen hat sich ja in der neuesten Zeit auf vielen anderen Gebieten bestätigt, und die hier in Anwendung kommenden Methoden sind zwar denjenigen der Psychophysik ähnlich, weichen anderseits aber in so vielen Beziehungen von denselben ab, daß sie eine selbständige Behandlung erfordern. Es wird wohl genügen, auf die so eifrig betriebenen Assoziationsuntersuchungen hinzuweisen, um die Erweiterung der Methodik über die Probleme der Psychophysik hinaus zu rechtfertigen. Betrachten wir das beispielsweise erwähnte Untersuchungsgebiet etwas näher, so ist leicht

[1]) Fechner, Elemente der Psychophysik, Leipzig 1860. Wundt, Physiologische Psychologie, 5. Aufl. Leipzig 1902. Ebbinghaus, Grundzüge der Psychologie, Bd. 1, Leipzig 1902. Müller, Gesichtspunkte und Tatsachen der psychophysischen Methodik, Wiesbaden 1904. Titchener, Experimental Psychology, Vol. II. P. II, London 1905. Lipps, Die psychischen Mafsmethoden, Braunschweig 1906.

ersichtlich, daß die sich hier darbietenden Probleme von genau derselben Art wie die der Empfindungsmessung sind. Wenn man z. B. die Anzahl Lesungen sucht, die eben nötig sind, damit eine Silbenreihe gegebener Länge fehlerfrei reproduziert werden kann, so wird es also die Aufgabe, einen meßbaren äußeren Umstand — die Anzahl der Wiederholungen — so zu variieren, daß ein bestimmter psychischer Zustand — die Möglichkeit des fehlerfreien Hersagens — herbeigeführt wird. Solche Messungen sind, wie Messungen überhaupt, mit gewissen Fehlern behaftet, und es wird folglich eine Aufgabe der psychologischen Methodik, anzugeben, wie die Messungen und die Berechnungen durchgeführt werden müssen, damit ein möglichst fehlerfreies Resultat erzielt werden kann.

Die psychologischen Probleme, die hier als Beispiele erwähnt wurden, brauchen indes nicht speziell, jedes für sich, von der Methodik behandelt zu werden. Es muß möglich sein, die psychologische Methodik so allgemein zu fassen, daß sie die Behandlung nicht nur der bisher vorliegenden, sondern auch aller künftigen psychologischen Messungen, wenigstens den Hauptzügen nach, angeben kann. Dies wird erreicht, wenn wir die zu behandelnden Probleme nach bestimmten Prinzipien ordnen, so daß wir sicher sein können, die Hauptgruppen möglicher Probleme berücksichtigt zu haben. Wenn wir hierauf abzielen, können wir es als die beiden Hauptaufgaben der Methodik bezeichnen, die Mafsmethoden zu beschreiben und die sich daran schließenden Berechnungen darzustellen. Betrachten wir jeden dieser Punkte etwas näher, und fangen wir mit dem ersteren an.

a) Die Maßmethoden. Eine psychologische Messung wird unter zwei verschiedenen Bedingungen möglich. Entweder kann ein psychischer Zustand P von einem quantitativ abstufbaren äußeren Umstande R abhängig sein, und zwar auf solche Weise, daß P sich intensiv oder extensiv verändert, wenn R verschiedene Werte annimmt; P ist dann folglich in quantitativer Beziehung eine mathematisch formulierbare Funktion φ von R, $P = \varphi(R)$. Oder aber der psychische Zustand P beeinflußt eine äußere meßbare Größe B auf solche Weise, daß B verschiedene Werte durchläuft, wenn P sich in gegebener Richtung, intensiv oder extensiv, verändert; B ist dann in dieser Beziehung eine Funktion Φ des P, $B = \Phi(P)$. Der Zweck der Messung wird es in beiden Fällen, zwei

einander entsprechende Reihen der P-Werte (P_1, P_2, P_3 usw.) und der R-Werte (R_1, R_2, R_3 usw.) bezw. B-Werte (B_1, B_2, B_3) zu bestimmen. Und die darauf folgenden Berechnungen bezwecken, erstens die möglichst fehlerfreien Resultate aus den Messungen abzuleiten, und zweitens womöglich die Art der Funktionen φ und Φ ausfindig zu machen.

Die Messung der einander entsprechenden P-Werte und R-Werte kann auf zweierlei Weise stattfinden. Entweder wird der Reiz variiert, indem man denjenigen Wert des R sucht, der eine bestimmte Größe des P hervorbringt; dies ist die sogenannte „Methode der Reizfindung". Oder aber man bestimmt diejenigen Werte des P, welche einer gegebenen Reihe der R-Werte entsprechen; dies ist die „Methode der Urteilsfindung". Unter diesen beiden Methoden wird die erstere in der weitaus größeren Anzahl von Fällen Anwendung finden können, weil wir fast immer imstande sind, die äußeren physischen Umstände beliebig zu verändern und zu messen, und folglich genau denjenigen Wert des R bestimmen können, der einem gegebenen, auf irgendeine Weise fixierten psychischen Zustande entspricht. Dagegen haben wir nur für die Extensität, nicht aber für die Intensität eines psychischen Zustandes ein Maß, das uns anzugeben gestattet, wie viele Male ein Zustand in einem anderen enthalten ist. Der psychische Zustand, der einem gegebenen physischen Reize entspricht, läßt sich daher nur durch eine Vergleichung mit einem konstanten Zustande bestimmen, und das Resultat des Vergleiches kann nur durch die Urteile: „größer, gleich, kleiner" angegeben werden. Die Methode der Urteilsfindung kann also direkt nur dann zur Anwendung kommen, wenn es sich um eine Vergleichung zweier Zustände handelt, und sie ist daher fast nur bei der Empfindungsmessung verwendbar; eine geschickte Abänderung hat ihr Gebiet jedoch etwas erweitert (vgl. Kap. 24 u. 25).

Selbstverständlich erfordern die nach den beiden erwähnten Methoden unmittelbar gewonnenen Versuchsdaten eine ganz verschiedene mathematische Bearbeitung, um die gesuchten Größen zu liefern. Auf diesen Unterschied hat man bisher so großes Gewicht gelegt, daß fast das ganze Interesse der Forscher davon absorbiert wurde. Der Gegensatz der beiden Methoden hat denn auch zu vielen Kontroversen Anlaß gegeben; so streitet man sich noch darüber, ob sie z. B. bei der Bestimmung der Unterschiedsschwellen zu

1*

denselben Resultaten führen könnten[1]). Daß eine solche Frage erhoben und nicht sofort mittels der experimentellen Ergebnisse erledigt werden konnte, ist wiederum eine Folge davon, daß die Unterschiede der Methoden überschätzt und viel wesentlichere Verhältnisse, die die Resultate beeinflußten, außer acht gelassen wurden. Im folgenden sollen die beiden Methoden und die die Resultate beeinflussenden Verhältnisse je an ihrem Orte eingehend behandelt werden, woraus hervorgehen wird, daß die in betreff der Beziehung der Methoden erhobenen Streitfragen sehr leicht zu lösen sind, wenn die beiden Methoden nur sowohl technisch als mathematisch korrekt gehandhabt werden.

Im letzteren der oben erwähnten Hauptfälle wirkt der psychische Zustand P auf eine äußere meßbare Größe B ein, was auch so bezeichnet werden kann, daß P sich einen äußeren Ausdruck gibt; die verschiedenen hierher gehörenden Methoden können daher die Ausdrucksmethoden genannt werden. Zur quantitativen Bestimmung der psychischen Vorgänge haben bisher nur zwei verschiedene Formen der Ausdrucksmethode Anwendung gefunden. Die ältere dieser Formen bezweckt nur, die Zeitdauer der psychischen Vorgänge zu messen, was dadurch möglich wird, daß die Versuchsperson nach Ablauf eines gegebenen Vorganges willkürlich ein Signal gibt. Es läßt sich somit die Zeit messen, die vom Anfang einer Reizung bis zum stattfindenden Signalisieren seitens der Versuchsperson verflossen ist, und die jedenfalls als ein Maß der Komplikation des abgelaufenen Prozesses betrachtet werden kann. Die zweite Form der Ausdrucksmethode bezweckt eine Messung der einer gegebenen psychischen Tätigkeit äquivalenten Arbeit. Sie fußt auf der zuerst von Loeb und Féré nachgewiesenen, später von R. Vogt, Lehmann und Heymans auf verschiedenen Gebieten untersuchten Tatsache, daß zwei gleichzeitige zentrale Vorgänge sich gegenseitig hemmen, und zwar im Verhältnis zu ihren relativen Intensitäten. Wird also irgendeine leichte, wenig intensive psychische Tätigkeit so ausgeführt, daß sie sich einen äußeren, meßbaren Ausdruck gibt, so wird eine zweite, hinzutretende Arbeit eine merkbare Herabsetzung der ersten Leistung verursachen. Die relative Größe dieser Ver-

[1]) Mosch, Über den Zusammenhang zwischen der Methode der Minimaländerungen und der Methode der richtigen und falschen Fälle. Phil. Studien. Bd. 20.

minderung ist dann ein Maß der hemmenden Arbeit. Es werden im folgenden diese beiden Maßmethoden als typische Formen der Ausdrucksmethode behandelt; ob künftig andere Methoden dieser Art gefunden werden können, mag dahingestellt bleiben.

b) Die verschiedenen Arten der Fehler. Als die zweite Hauptaufgabe der Methodik wurde oben die mathematische Bearbeitung der durch die Messung gefundenen Zahlen bezeichnet. Zu einer rationellen Einteilung dieses Abschnittes gelangen wir durch folgende Betrachtung. Jede Messung ist unvermeidlich mit Fehlern behaftet. Es ist die Aufgabe sowohl der Versuchsanordnung als der rechnerischen Behandlung der gewonnenen Zahlen, diese Fehler zu eliminieren, um die möglichst richtigen Resultate zu erzielen. Wie diese Elimination der Fehler erreicht werden kann, ist in erster Linie von der Natur der Fehler abhängig. Folglich muß eine rationelle Darstellung sich nach diesem Verhältnisse richten, und wir fangen daher mit einer Untersuchung der verschiedenen Arten der Fehler an.

Ein psychischer Zustand P ist nie durch einen einzelnen äußeren Umstand R bestimmt; die Größe des P ist stets nicht nur von zahlreichen physischen Faktoren, sondern auch von verschiedenen psychophysiologischen Bedingungen abhängig. Wenn wir also z. B. behufs einer Messung zwei psychische Zustände P und P' vergleichen, so verbürgt uns nichts, daß die entsprechenden Reize, R und R' unter den nämlichen Umständen einwirken. Sind sie gleichzeitig gegeben, so müssen sie auf verschiedene Stellen eines Sinnesorganes wirken, und es ist jedenfalls nicht ausgeschlossen, daß schon durch diesen Unterschied der Raumlage ein Unterschied der resultierenden psychischen Zustände bewirkt wird. Man wird in solchem Falle also nicht $R = R'$ finden können, wenn $P = P'$; und wenn die beiden Reize während der ganzen Messung dieselbe Raumlage behalten, wird R mit einem von eben dieser Raumlage abhängigen konstanten Fehler behaftet sein. Nun gibt es außer der Raumlage noch zahlreiche andere Faktoren, die konstante Fehler verursachen können; einige dieser Fehler sind eliminierbar, andere dagegen nicht, und es wird folglich eine wesentliche Aufgabe der Methodik, anzugeben, wie die konstanten Fehler zu behandeln sind.

Während einige Fehlerursachen, wie eben hervorgehoben, konstant oder fast konstant bleiben können, gibt es

viele andere, die unaufhörlich schwanken. Es ist zwar nicht sehr wahrscheinlich, daß jede einzelne Ursache für sich betrachtet regellose Intensitätsveränderungen darbieten würde; dem Anschein nach wird dies aber dann stattfinden, wenn zahlreiche, größtenteils unbekannte Faktoren, die das Resultat der Messung ebenso leicht zu vergrößern wie zu vermindern vermögen, in allen möglichen Kombinationen vorkommen können. Die hieraus resultierenden Fehler wechseln ganz regellos und werden daher als zufällige Fehler bezeichnet. Die Ursachen solcher zufälligen Fehler sind sehr verschieden; zum Teil rühren sie von der Unvollkommenheit der Instrumente her. Diese Fehlerursachen, die bei den exakten physikalischen Messungen die Hauptrolle spielen, sind indes bei den psychologischen Messungen von wenigerem Belang, weil sie im Vergleich mit den von den Variationen der Aufmerksamkeit, der Disposition, der Stellung usw. herrührenden Fehlern verschwindend klein sind. Übrigens braucht man die Ursachen dieser Fehler gar nicht zu kennen, um sie eliminieren zu können. In einer sehr großen Anzahl Messungen wird nämlich die relative Häufigkeit eines bestimmten Fehlers eine bekannte Funktion seiner Größe sein, und dieser Umstand ermöglicht sowohl die Elimination der Fehler als auch die Prüfung der Voraussetzung, daß die Fehler wirklich als zufällige Fehler betrachtet werden dürfen. Diese verschiedenen, die zufälligen Fehler betreffenden Fragen werden wir in einem besonderen Abschnitt behandeln.

Häufig wird es vorkommen können, daß eine bestimmte Fehlerursache während der mehrmals wiederholten Messung nicht völlig konstant bleibt, sondern gesetzmäßigen Schwankungen unterliegt. Die hieraus resultierenden Fehler sind selbstverständlich weder konstant, noch fügen sie sich dem Gesetze der zufälligen Fehler; sie bilden eben eine besondere Gruppe von Fehlern, die wir, der Kürze wegen, als variable Fehler bezeichnen können. Solche Fehler kommen wahrscheinlich bei fast allen psychologischen Messungen vor, und sie sind denn auch wohlbekannt. Man hat ihnen aber bisher nur wenig Beachtung geschenkt; indem man sie als „unausgeglichene zufällige Fehler“ bezeichnet, behandelt man gewöhnlich die Zahlen — trotz des Vorkommens dieser Fehler — nach den für die rein zufälligen Fehler geltenden Gesetzen. Daß die Resultate unter diesen Umständen oft entschieden falsch, jedenfalls immer unzuverlässig werden, leuchtet ein;

die variablen Fehler erfordern notwendigerweise eine besondere Behandlung, indem das in jedem gegebenen Falle geltende Verteilungsgesetz der Fehler erst bestimmt werden muß, ehe eine Elimination möglich wird. Die hierher gehörenden Fragen sollen in einem dritten Abschnitt behandelt werden.

Es erübrigt nur noch das Problem, wie aus den gewonnenen Messungsresultaten die funktionelle Beziehung zwischen dem psychischen Zustande und dem erregenden Reize, bezw. dem äußeren Ausdruck des Zustandes, abgeleitet werden kann. Dies geschieht zwar ausschließlich durch mathematische Operationen, die nichts der psychologischen Methodik Besonderes oder Eigentümliches darbieten; eine kurze Darstellung der am häufigsten vorkommenden Fälle wird jedoch hier am Platze sein.

In der folgenden Darstellung werden wir die verschiedenen angegebenen Probleme der Methodik aus praktischen Rücksichten nicht in der hier erwähnten Ordnung behandeln. Eine bessere Übersicht wird erreicht, wenn wir im ersten Hauptabschnitt die mathematischen Prinzipien der Fehlerausgleichung und der Funktionsbestimmung darlegen, um dann im zweiten Hauptabschnitt die Maßmethoden zu erörtern. Durch diese Ordnung wird es ermöglicht, daß im zweiten Abschnitt die mathematische Behandlung verschiedener spezieller Probleme beispielsweise vollständig durchgeführt werden kann, wodurch die Anwendung der mathematischen Prinzipien jedenfalls den Nichtmathematikern verständlicher wird.

I.

Die Fehler und ihre Elimination.

A. Konstante Fehler.

2. *Die Ursachen der konstanten Fehler.* Es wurde schon oben hervorgehoben, daß die meßbare Größe (Intensität oder Kapazität) eines psychischen Zustandes immer von mehreren gleichzeitigen Faktoren abhängig sein wird. Jeder solche konstante Faktor, der den Zustand beeinflußt, kann unter Umständen zu einem konstanten Messungsfehler Anlaß geben. Ein Beispiel wird die Sache am besten erleuchten. Nehmen wir an, daß die Größe der Müller-Lyerschen Täuschung ge-

messen werden soll. Die eine Hälfte der Figur hat die konstante Länge *n* und ist in der Stellung *a* (Fig. 1) angebracht; die andere Hälfte hat die veränderliche Länge *v*, die so variiert wird, daß *v* gleich *n* erscheint. Objektiv gemessen, können die beiden Größen dann recht verschieden sein; während $n = 100$ mm ist, findet man z. B. für *v* den Wert $v_a = 121{,}4$ mm. Wir dürfen nun aber nicht behaupten, daß dieser Unterschied ausschließlich durch die Form der Figuren bedingt sei; weil die obere Hälfte einer Figur gewöhnlich größer als die untere Hälfte geschätzt wird, kann die Raumlage der Figuren dazu beigetragen haben, den gefundenen Unterschied hervorzubringen. Um dies näher zu untersuchen, vertauschen wir die Stellung der Figuren, so daß *n* jetzt in die Lage *b* gebracht wird, und wir finden dann für *v* den Wert $v_b = 120{,}0$. Die räumliche Anordnung der Figuren hat also tatsächlich das Resultat beeinflußt und einen Fehler der Messung herbeigeführt. Wir können aber die Größe dieses Fehlers nicht beurteilen, weil die in den beiden Raumlagen gefundenen Werte *v* mit einem von der verschiedenen Form der Figuren herrührenden, weit größeren Fehler behaftet sind. Aus diesem Beispiel lernen wir also, daß zwei (oder mehrere) Umstände, die gleichzeitig einen psychischen Zustand bedingen, als gegenseitige Fehlerquellen der Messung wirken. Einerseits läßt sich der Einfluß der Form auf die Schätzung nicht messen, weil die räumliche Anordnung der Figuren als Fehlerquelle auftritt; anderseits können wir nicht die Bedeutung der räumlichen Anordnung bestimmen, weil schon die verschiedene Form der Figuren einen Unterschied der als gleich geschätzten Größen herbeiführt.

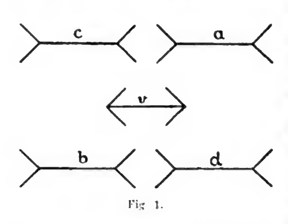


Fig. 1.

Aus diesem Zirkel heraus führt nur ein einziger Weg. Da die beiden Größen, die verglichen werden sollen, notgedrungen räumlich irgendwie nebeneinander gelagert werden müssen, können wir damit anfangen, den Einfluß der räumlichen Anordnung zu bestimmen, indem die beiden zu vergleichenden Größen in jeder anderen Beziehung einander gleich gemacht werden. Wir ersetzen also die Müller-Lyerschen Figuren durch einfache gerade Linien, die in die oben-

erwähnten Lagen a und b gebracht werden. Finden wir jetzt $v_a = n + q$ und $v_b = n - q$, so ist ersichtlich, daß die Länge n in der ersten Lage um ebenso viel überschätzt als in der zweiten Lage unterschätzt worden ist, und die arithmetische Mitte $\frac{v_a + v_b}{2} = n$ ergibt dann eben die geschätzte Länge. Wenn wir uns auf diese Weise vergewissert haben, daß die Raumlage einen konstanten Fehler herbeiführt, kann die Größe der Täuschung, d. h. der von der Form der Figuren abhängige scheinbare Längenunterschied, leicht berechnet werden. Es sei diese Größe k. In der Lage a haben wir dann $v_a = n + k + q$ und in der Lage b: $v_b = n + k - q$. Hieraus folgt:

$n + k = \frac{1}{2}(v_a + v_b)$, also $k = \frac{1}{2}(v_a + v_b) - n$ . . (Gleich. 1).

Die hier beispielsweise durchgeführte Betrachtung läßt sich, wie leicht ersichtlich, auf alle ähnlichen Fälle übertragen. Wenn ein psychischer Zustand von zwei oder mehreren Faktoren abhängig ist, kann der Anteil des einzelnen Faktors an der gemessenen Größe nicht berechnet werden. Man muß daher den Einfluß jedes einzelnen Faktors speziell bestimmen, was dadurch geschieht, daß die zu vergleichenden Größen in allen Beziehungen genau gleich gemacht werden außer in derjenigen, deren Einfluß bestimmt werden soll. Hat man sich auf diese Weise davon überzeugt, daß ein gegebener Umstand einen konstanten Messungsfehler herbeiführt, so kann dieser Fehler eliminiert werden, wenn die Verhältnisse — wie z. B. die Raumlagen — umkehrbar sind. Wenn in einem Falle die variable Größe mit dem positiven Fehler $+q$, in dem umgekehrten Falle mit dem negativen Fehler $-q$ behaftet ist, so lassen diese Fehler sich nach Gleich. 1 eliminieren. Sind die Verhältnisse entweder nicht umkehrbar, oder hat ein Fehler in den verschiedenen Lagen nicht dieselbe Größe, so bleibt nichts anderes übrig, als die Größe dieses Fehlers besonders zu bestimmen und in Abzug zu bringen. Haben wir im obigen Beispiel $v_a = n + k + q$, und ist q hier aus anderen Messungen bekannt, so kann k berechnet werden. Dieser Punkt wird übrigens im Kap. 4 näher erörtert.

Während man fast immer durch eine zweckmäßige Versuchsanordnung erreichen kann, daß in einer Reihe von Messungen nur der Faktor variiert wird, dessen Einfluß untersucht werden soll, gibt es gewisse Faktoren, die sich unvermeidlich in jede Messung hineinmischen und die

Resultate trüben. Diese Faktoren sind eben die räumlichen und zeitlichen Beziehungen der Reize. Zwei Reize derselben Modalität können gleichzeitig gegeben sein, müssen dann aber räumlich nebeneinander, also auf verschiedene Stellen des Sinnesorganes einwirken. Oder auch können die Reize dieselbe Stelle eines Sinnesorganes treffen; sie müssen dann aber nacheinander einwirken, um überhaupt verglichen werden zu können. Im ersteren Falle wird also die Raumlage, im zweiten die Zeitlage einen konstanten Fehler herbeiführen können, und mit dem Vorkommen wenigstens e i n e s solchen Fehlers ist bei jeder Messung zu rechnen. Eine allgemeine Darstellung, wie diese Fehler zu behandeln sind, wird deshalb hier am Orte sein. Da einige derselben eliminierbar, andere dagegen nicht eliminierbar sind, können wir der leichteren Übersicht wegen jede dieser Gruppen gesondert besprechen.

3. *Eliminierbare Fehler.* Der Fehler, der durch die verschiedene Raumlage zweier zu vergleichenden Reize entsteht, nennen wir kurz den Raumfehler. Damit ein Raumfehler entsteht, ist es übrigens nicht durchaus notwendig, daß die Reize auf verschiedene Stellen eines Sinnesorganes einwirken. Es kann auch vorkommen, daß die Reize zwar auf dieselben Orte einwirken, daß das Sinnesorgan aber den beiden Reizen gegenüber eine verschiedene Stellung einnimmt. Dies wird z. B. bei einhändigen Gewichtshebungen der Fall sein, wenn die Gewichte nebeneinander stehen und der Arm folglich seine Stellung verändern muß, um die beiden Gewichte nacheinander zu heben. Die dadurch bewirkte veränderte Lage und Spannung der Muskeln beeinflußt erfahrungsmäßig die Vergleichung der Gewichte, und es entsteht folglich ein Raumfehler.

Die Raumlage zweier Reize ist immer umkehrbar; wir können stets die links und rechts, oben und unten wirkenden Reize beliebig vertauschen. Wenn in jeder Raumlage die nötigen Messungen ausgeführt sind, können also eventuelle Raumfehler nach Gleich. 1 eliminiert werden, insofern wir sicher sein können, daß der Raumfehler konstant war, d. h. in den beiden Raumlagen dieselbe numerische Größe mit entgegengesetzten Vorzeichen hatte. Sind die beiden zu vergleichenden Reize, n und v, nur wenig verschieden, so läßt sich überhaupt kein Grund anführen, weshalb v, nach Umkehrung der Raumlage, nicht genau so wie früher n von der Raumlage beeinflußt werden sollte. In diesem Falle dürfen wir also

unzweifelhaft nach Gleich. 1 verfahren. Sind v und n dagegen sehr verschieden (es sei z. B. $v > n$), so ist allerdings die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß das größere v, wenn es auf dieselbe Stelle wie früher n einwirkt, von der Lage anders beeinflußt wird, oder mit anderen Worten: der Raumfehler bleibt nicht konstant. In diesem Falle wird man also haben:

$v_a = n + k + q_a$ und $v_b = n + k - q_b$. Der mittlere Wert:

$\frac{1}{2}(v_a + v_b) = n + k + \frac{1}{2}(q_a - q_b)$ . . . . (Gleich. 2)

ist folglich nicht von dem Raumfehler befreit. Es handelt sich nun darum, ob die Größe $\frac{1}{2}(q_a - q_b)$ so klein ist, daß sie vernachlässigt werden darf. Wenn $v_a - v_b = q_a + q_b$ nur klein ist, muß $\frac{1}{2}(q_a - q_b)$ selbstverständlich noch viel kleiner sein; im ungünstigsten Falle, wenn $q_a = 0$ oder $q_b = 0$, wird $\frac{1}{2}(q_a - q_b) = \pm \frac{1}{2}(q_a + q_b)$, und folglich kann der nicht eliminierte Raumfehler der Gleich. 2 nur so groß werden. Wenn diese Größe kleiner als der wahrscheinliche Fehler der Messung ist, darf man sie vernachlässigen.

Es erweist sich erfahrungsmäfsig fast immer, dafs die Gröfse $q_a + q_b = v_a - v_b$ so klein wird, dafs sie unbedenklich vernachlässigt werden darf. In dem obigen Beispiel von der Messung der Müller-Lyer'schen Täuschung war $n = 100$, und wir fanden $v_a = 121{,}4$, $v_b = 120{,}0$; es ist somit $\frac{1}{2}(v_a + v_b) = 120{,}7$, und da $v_a - v_b = 1{,}4$, wird der nicht-eliminierte Rest des Raumfehlers im ungünstigsten Falle $= 0{,}7$. Da dieser Fehler nur 0,58 % der gemessenen Gröfse beträgt und aufserdem weit geringer als der wahrscheinliche Fehler der Messung ist (worüber weiter unten im Kap. 18), kann der Raumfehler als vollständig eliminiert angesehen werden. Dafs dies in dem vorliegenden Falle tatsächlich berechtigt ist, wird durch die Messungen der beiden anderen Raumlagen bestätigt. Es wurde nämlich $v_c = 120{,}3$ und $v_d = 120{,}8$ (vgl. Fig. 1) gefunden. Während $v_a > v_b$, ist also $v_c < v_d$ gefunden, so dafs der Raumfehler in diesen Lagen von anderartigen Fehlervorgängen vollständig überwogen wird. Da übrigens $\frac{1}{2}(v_c + v_d) = 120{,}55$, also fast genau gleich $\frac{1}{2}(v_a + v_b) = 120{,}7$, kann der mittlere Wert sämtlicher vier Gröfsen als der rechte angesehen werden.

Die Fehler, die durch die Zeitlagen gegebener Reize verursacht werden, können wir, dem Raumfehler analog, als Zeitfehler bezeichnen. Es gibt deren mehrere Arten. Erstens zeigt es sich, daß die Vorgänge, die von gleichzeitigen oder kurz nacheinander folgenden Reizen erregt werden, sich auf verschiedene Weise gegenseitig beeinflussen; die hierdurch entstehenden Zeitfehler lassen sich nicht eliminieren und sollen im folgenden Kapitel kurz besprochen werden. Zweitens

wissen wir, daß jede länger dauernde psychische Arbeit irgendwelcher Art schließlich eine merkbare Ermüdung verursacht, durch welche die Arbeit gewöhnlich vermindert, jedenfalls beeinflußt wird. Diese durch die Ermüdung bewirkte Veränderung der psychischen Tätigkeit kann als ein Zeitfehler betrachtet werden, weil sie von der Aufeinanderfolge der Reizungen herrührt. Dieser Zeitfehler, mit welchem bei allen psychologischen Messungen gerechnet werden muß, kann zwar nicht vollständig eliminiert, jedoch unschädlich gemacht werden, wie gleich im folgenden nachgewiesen werden soll. Drittens wissen wir, daß die häufige Wiederholung irgendwelcher psychischen Tätigkeit ebenfalls die Leistungen beeinflußt; diese Wirkung der Übung ist gewöhnlich derjenigen der Ermüdung entgegengesetzt. Da alle psychologischen Messungen häufig wiederholt werden müssen, um die Elimination der zahlreichen zufälligen Fehler zu ermöglichen, wird also hierdurch eine stetige Veränderung der Leistungen verursacht oder mit anderen Worten ein Zeitfehler eingeführt, der unschädlich gemacht werden muß. Im folgenden wird die Wirkung der Übung gleich nach derjenigen der Ermüdung behandelt werden.

Die Ermüdung. Die Wirkung der Ermüdung auf eine psychische Tätigkeit kann je nach der Art derselben verschieden werden. Wir brauchen indes nicht die besondere Wirkung in jedem gegebenen Falle zu kennen, wenn wir nur davon ausgehen können, daß die Wirkung eine gleichmäßig fortschreitende ist. Mit vollständiger Sicherheit läßt sich dies natürlich keineswegs behaupten, und um den Fehler möglichst klein zu machen, sucht man daher durch passend gewählte Ruhepausen einer stärkeren Ermüdung vorzubeugen. Auf diese Weise, durch die Anordnung der Versuche, muß die Wirkung der Ermüdung größtenteils eliminiert werden; eine merkbare Ermüdung darf nie vorkommen. Daß sich dennoch, trotz aller Vorsicht, während der Arbeit eine geringe Ermüdung einstellt, ist wohl unvermeidlich; man sucht aber den Einfluß derselben auf folgende Weise unschädlich zu machen. Nehmen wir an, daß an einem Tage n verschiedene Messungen ausgeführt werden sollen. Es handelt sich z. B. darum, die Bedeutung des Tempos für das Auswendiglernen festzustellen, zu welchem Zwecke an jedem Tage Silbenreihen konstanter Länge in n verschiedenen Tempos gelernt werden. Man geht also die verschiedenen Tempos in einer bestimmten Reihen-

folge, 1, 2, 3 . . . n, durch und liest z. B. eine Silbenreihe in jedem Tempo. Darauf werden die Tempos nochmals durchgemacht, diesmal aber in der umgekehrten Reihenfolge, $n, (n-1), \ldots 3, 2, 1$, indem wieder eine Silbenreihe in jedem Tempo gelernt wird. Nehmen wir nun an, daß die unvermeidliche Ermüdung gleichmäßig anwächst, und daß die Leistung daher bei jeder neuen Lesung um die konstante Größe d herabgesetzt ist. War die Leistung bei der 1. Lesung a, wird sie also bei der 2. Lesung $a-d$ usf. Die Leistungen bei den verschiedenen Tempos gehen aus dem folgenden Schema übersichtlich hervor:

Tempo:	1	2	3	. . . . . .	n
Leistung:	a	$a-d$	$a-2d$	. . . . .	$a-(n-1)d$

Tempo:	n	$n-1$	. . . . .	2	1
Leistung:	$a-nd$	$a-(n+1)d$	. .	$a-(2n-2)d$	$a-(2n-1)d$

Berechnet man nun den mittleren Wert der Leistung für jedes Tempo, so erhält man also für

$$\text{Tempo 1: } \tfrac{1}{2}[a+a-(2n-1)d] = a - \frac{2n-1}{2}d;$$

$$\text{Tempo 2: } \tfrac{1}{2}[a-d+a-(2n-2)d] = a - \frac{2n-1}{2}d; \text{ usw.}$$

Die auf diese Weise berechneten Leistungen werden alle gleichgroß, und ihr Wert: $a - \frac{2n-1}{2}d$ ist eben derjenige, den man erhalten hätte, wenn sämtliche Lesungen in einem mittleren Ermüdungszustand ausgeführt worden wären. Die Ermüdung ist also tatsächlich nicht eliminiert, sondern nur dadurch unschädlich gemacht worden, daß die verschiedenartigen Messungen auf eine gemeinsame mittlere Ermüdung reduziert sind. Dies wird aber nur dann der Fall, wenn d konstant ist, wofür wir keine Garantie haben. Der Fehler wird aber äußerst klein, wenn d selbst eine kleine, gegen a zu vernachlässigende Größe ist.

Die Übung. Eine psychische oder körperliche Arbeit wird nicht sofort mit der möglichst großen Sicherheit und Geschwindigkeit ausgeführt; dies wird erst nach einer kürzer oder länger dauernden Einübung erreicht. Die Dauer der Einübung ist einerseits von der Schwierigkeit der Arbeit, anderseits davon abhängig, ob die Versuchsperson früher ähnliche Arbeiten ausgeführt hat. Wer sich an eine Arbeit, z. B.

Empfindungsmessungen auf einem Sinnesgebiete, gewöhnt hat, übt sich verhältnismäßig schnell auf ähnliche Arbeiten — Empfindungsmessungen auf anderen Sinnesgebieten — ein. Die durch die Übung verursachte Steigerung der Leistungen wächst fast immer anfangs sehr stark, um dann später einen äußerst geringen Zuwachs zu erhalten. Nach welchem Gesetze die Leistungen in der ersteren Periode, bei der anfänglichen starken Steigerung, anwachsen, wissen wir gar nicht; das wird sich wahrscheinlich je den äußeren und inneren Umständen nach verschieden stellen. Um diese unberechenbaren Einflüsse der Übung zu vermeiden, stellt man gewöhnlich erst eine Reihe Vorversuche an, die nicht zu den eigentlichen Messungen mitgerechnet werden und eben nur den Zweck haben, den Versuchspersonen die nötige Übung zu verschaffen. Sobald die Resultate sich nicht wesentlich verändern, können die Vorversuche abgeschlossen werden. Die fernere Wirkung der Übung wird dann, derjenigen der Ermüdung analog, unschädlich gemacht, indem man davon ausgeht, daß die Leistungen an jedem Arbeitstage durch die Übung um eine konstante Größe D gesteigert werden. Die Arbeit wird daher nach einem bestimmten Schema geordnet.

Es sei eine Reihe Messungen auszuführen, jede Messung p mal, was im ganzen $2n$ Tage beansprucht. Man führt dann die Messungen in einer bestimmten Reihenfolge, 1, 2, 3 ... n, jede Messung aber nur $p/2$ mal aus; diese Arbeit wird also in n Tagen erledigt. Darauf werden die Messungen nochmals $p/2$ mal, aber in der umgekehrten Reihenfolge, n, $(n-1)$ ... 3, 2, 1 gemacht. Es seien die Leistung am ersten Tage a und die Steigerung derselben durch die Übung an jedem Tage D; die Leistungen bei den verschiedenen Messungen werden dann:

Messung:	1	2	3	n
Leistung:	a	$a+D$	$a+2D$	$a+(n-1)D$
Messung:	n . . .	3	2	1
Leistung:	$a+nD$	$a+(2n-3)D$	$a+(2n-2)D$	$a+(2n-1)$D.

Berechnen wir den mittleren Wert der Leistungen bei den gleichartigen Messungen, so erhalten wir also

für Messung 1: $\frac{1}{2}[a+a+(2n-1)D] = a+\frac{2n-1}{2}D;$

für Messung 2: $\frac{1}{2}[a+D+a+(2n-2)D] = a+\frac{2n-1}{2}D$, usf.

Die Verhältnisse werden also hier denjenigen der Ermüdung analog, indem die auf die angeführte Weise berechneten

Leistungen alle gleichgroß werden, und ihr Wert ist demjenigen gleich, den man erhalten hätte, wenn sämtliche Messungen mit einer mittleren Übung ausgeführt wären. Der Einfluß der Übung wird also gar nicht eliminiert, sondern nur unschädlich gemacht, und in betreff der Richtigkeit des ganzen Verfahrens gilt genau dasselbe, was oben von der Ermüdung gesagt wurde.

4. *Die nicht eliminierbaren Zeitfehler.* Wie schon oben bemerkt, können sowohl gleichzeitige als sukzessive zentrale Prozesse einander gegenseitig beeinflussen, wodurch Veränderungen entstehen, die in gegebenen Fällen als „Zeitfehler" der Messungen auftreten. Alle diese Fehler lassen sich nicht eliminieren, und sie müssen daher entweder durch die Versuchsanordnung vermieden oder in Rechnung gezogen werden. Wie dies in den einzelnen Fällen auszuführen ist, kann hier nicht erörtert werden; es ist eben die Aufgabe der Psychodynamik, die gegenseitigen Hemmungen gleichzeitiger und Bahnungen aufeinanderfolgender Vorgänge zu untersuchen und ihre Bedeutung für die verschiedenen psychischen Erscheinungen darzulegen. Die Aufgabe der Methodik kann nur die sein, die allgemeinen Prinzipien der Lösung solcher Probleme anzugeben.

Zuweilen gelingt es, mittels einer zweckmäßigen Versuchsanordnung die störenden Einflüsse zu beseitigen; dies gilt z. B. von der als simultaner Kontrast hervortretenden Hemmung gleichzeitiger Lichtreize. Wenn zwei Lichtreize auf einem lichtlosen Hintergrund so weit voneinander entfernt sind, daß sie außerhalb ihrer gegenseitigen Hemmungsgebiete liegen, so wird kein simultaner Kontrast stattfinden; diese Methode zur Beseitigung des Kontrastfehlers wurde von Merkel bei zahlreichen Untersuchungen angewandt [1]). Sie hat aber den Nachteil, daß die Vergleichung unsicherer wird, als wenn die zu vergleichenden Reize unmittelbar aneinander grenzen. Sobald dies aber der Fall ist, tritt auch sofort die Kontrastwirkung ein; die hierdurch verursachte Veränderung der ausgelösten peripheren Prozesse kann indes unter bestimmten Bedingungen berechnet werden. Wenn die beiden Felder nämlich hinreichend groß sind und das eine nicht das andere umschließt, so wird der Kontrast nur an der Grenzlinie auftreten, und man kann jedes Feld als Hintergrund des anderen Feldes betrachten.

---

[1]) Phil. Stud. Bd. 4 S. 553—555.

Werden die Untersuchungen ferner mit dunkeladaptiertem Auge unter Ausschluß alles fremden Lichtes ausgeführt, so ist die Kontrastwirkung leicht zu berechnen. Sieht man nämlich ein Feld von der Intensität F auf einem Hintergrunde von der Intensität H, so verhält es sich, als ob es die Intensität F_0 hätte und auf einem lichtlosen Hintergrund gesehen würde; für F_0 haben wir hier den folgenden Ausdruck[1]):

$$F_0 = F \cdot \frac{F^2 + FH}{F^2 + FH + H^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gleich. 3a).}$$

Analog wird ein Feld H, auf einem Hintergrunde F gesehen, sich wie ein Feld H_0 auf lichtlosem Hintergrunde verhalten, in dem:

$$H_0 = H \cdot \frac{H^2 + FH}{H^2 + FH + F^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gleich. 3b).}$$

Aus diesen beiden Ausdrücken ergibt sich die einfache Folge: $\frac{F_0}{H_0} = \left(\frac{F}{H}\right)^2$.

Wenn man also statt der tatsächlich angewandten Intensitäten F und H überall die nach Gleich. 3a und 3b berechneten Werte F_0 und H_0 einführt, so ist dadurch die Wirkung des Simultankontrastes in Rechnung gezogen. F_0 und H_0 sind nämlich eben diejenigen Intensitäten, die ohne Kontrast dieselben Empfindungen erregen wie F und H, wenn sie sich gegenseitig durch Kontrast beeinflussen. Es ist übrigens aus den Gleich. 3a und 3b ersichtlich, daß die Korrektion des Kontrastes unnötig wird, wenn F und H einander ungefähr gleich sind und in den zu prüfenden Formeln unbekannte Konstanten vorkommen. In diesem Falle wird nämlich mit großer Annäherung $F_0 = \frac{2}{3} F$ und $H_0 = \frac{2}{3} H$, wodurch nur die Konstanten der Formeln sich verändern.

Was hier beispielsweise für den Simultankontrast, die gegenseitigen Hemmungen der Netzhautprozesse, entwickelt worden ist, gilt auch von den Hemmungen gleichzeitiger zentraler Vorgänge. Es müssen in jedem gegebenen Falle diejenigen Reizgrößen berechnet werden, die dieselben zentralen Vorgänge ohne gegenseitige Hemmung erregen würden wie die tatsächlich vorkommenden Reizgrößen, wenn sie sich gegenseitig zentral hemmen. Die ferneren Berechnungen sind dann mit diesen „hemmungsfreien“ Reizgrößen durchzuführen, indem man sie statt der wirklichen Reizgrößen in die Formeln einsetzt, genau so, wie man den Simultankontrast durch Einführung des F_0 und

[1]) Lehmann, Elemente der Psychodynamik, S. 221.

H_0 statt F und H berücksichtigt. Die Bestimmung der „hemmungsfreien" Reizgrößen der zentralen Vorgänge wird aber oft sehr schwierig und nur mit Annäherung möglich; in betreff des näheren muß auf die speziellen psychodynamischen Untersuchungen verwiesen werden[1]).

Geht ein konstanterReiz r einem variablen Reize r_2 voraus, so findet man stets, wenn die beiden Reize übrigens unter denselben Bedingungen einwirken, daß gleichstarken Empfindungen nicht $r_2 = r$, sondern $r_2 < r$ entspricht. Analog findet man, wenn der variable Reiz r_1 dem konstanten r vorausgeht, daß $r_1 > r$, wenn die erregten Empfindungen gleich stark sind. Da die Zeitlage zweier Reize immer einfach umkehrbar ist, erscheint es auch a priori als sehr wahrscheinlich, daß die arithmetische Mitte der in den beiden Zeitlagen gefundenen Werte r_1 und r_2 dem konstanten Reize r gleich sein wird, also $\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = r$. Fechner nahm dies denn auch ohne nähere Untersuchung an; daß es sich aber tatsächlich nicht so verhält, wurde schon früh, 1884, von P. Starke in betreff der Schallempfindungen, später, 1898, von Martin und Müller für das Gebiet der Gewichtsempfindungen nachgewiesen. „Der letzte von zwei sukzessiven Vorgängen ist also mit einem Zeitfehler behaftet, der nicht durch Umkehrung der Zeitlage eliminiert werden kann. Wir wissen jetzt, daß dieser Zeitfehler davon herrührt, daß der erste Vorgang dem nachfolgenden einen Bahnungszuwachs gibt, dessen Größe von mehreren verschiedenen Umständen abhängig wird. Im einfachsten Falle, wenn es sich um kurzdauernde Reizungen handelt, ist der Bahnungszuwachs N_t vom Intervalle t zwischen den beiden Reizungen und von der Größe des ersten Reizes abhängig. Es sei diese Größe r, dann wird $N_t = u \cdot r^v$, wo u und v Funktionen des Intervalles t, für konstante Intervalle also Konstanten sind. Wenn der Normalreiz r und der nach dem Intervalle t folgende variable Reiz r_2 gleichstarke Empfindungen erregen, wird folglich:

$$r = r_2 + u \cdot r^v \quad \text{(Gleich. 4a).}$$

Geht der variable Reiz r_1 dem konstanten r voraus, so erhält man:

$$r_1 = r + u\, r_1^v \quad \text{(Gleich. 4b).}$$

Hieraus ergibt sich: $\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = r + \frac{1}{2} u\, (r_1^v - r^v)$. Erfahrungsmäßig findet man $v > 1$, und die Differenz $r_1^v - r^v$ darf

[1]) Lehmann, Psychodynamik, S. 249—258 u. 268—269.

folglich nicht vernachlässigt werden, selbst wenn r_1 und r nur wenig voneinander differieren. Dies heißt mit andern Worten nur, daß der Zeitfehler nicht dadurch eliminiert wird, daß man die arithmetische Mitte der Werte r_1 und r_2 bildet. Dagegen wird eine Elimination unter besonderen Umständen auf folgende Weise möglich. Wir bringen die Gleich. 4a und 4b auf die Form:

$$\frac{r - r_2}{r} = u \cdot r^{v-1} = \varrho \quad \text{(Gleich. 5a) und:}$$

$$\frac{r_1 - r}{r_1} = u \cdot r_1^{v-1} = \varrho' \quad \text{(Gleich. 5b).}$$

Da $v - 1$ fast immer eine von Null nur wenig verschiedene Größe ist, kann $\varrho = \varrho'$ gesetzt werden, wenn der Unterschied zwischen r und r_1 ebenfalls nur gering ist. Man erhält dann:

$$\frac{r - r_2}{r} = \frac{r_1 - r}{r_1} \text{ oder } r = \sqrt{r_1 \cdot r_2} \quad \text{(Gleich. 6).}$$

Der Zeitfehler kann also, wenigstens mit großer Annäherung, dadurch eliminiert werden, daß das geometrische Mittel der in den beiden Zeitlagen gefundenen Werte gebildet wird. Dies gilt aber, wie leicht ersichtlich, nur wenn Gleich. 4a und 4b gültig sind, d. h. wenn die von r_1, r und r_2 erregten Empfindungen gleichstark sind. Stehen diese Empfindungen dagegen in irgendeiner anderen Beziehung zueinander, bilden sie z. B. ebenmerkliche Empfindungsunterschiede, so kann von einer solchen Elimination keine Rede sein. In diesem Falle kann dem Zeitfehler nur dadurch Rechnung getragen werden, daß seine Größe im voraus bestimmt und dem zweiten Reize hinzugefügt wird. Wenn zwei in irgend einer Beziehung stehende Empfindungen den Reizen P und Q entsprechen, von welchen Q der zuzweit eintretende ist, dann wirkt Q, als hätte er die Größe $Q + u P^v$, und mit dieser Reizgröße muß gerechnet werden. Die Prüfung der Gültigkeit irgendeiner Formel in betreff der vorliegenden Empfindungsrelation wird also nur dann möglich, wenn die Größen u und v bekannt sind.

Die Bestimmung der Größen u und v ist mit keiner besonderen Schwierigkeit verbunden. Man bestimmt experimentell entweder der Gleich. 5a zufolge die Werte r_2, oder der Gleich. 5b zufolge die Werte r_1, die einer Reihe Werten des r entsprechen. Unter diesen Messungen sind die erstgenannten unzweifelhaft deshalb vorzuziehen, weil sie mit größerer Sicherheit und Genauigkeit ausgeführt werden können. Wenn nämlich der konstante Reiz r zuerst eintritt, wird die dadurch erregte Empfindung eine konstante Größe, die sich nach und

nach dem Gedächtnisse einprägt und sich mit der folgenden, von dem variablen r_2 herrührenden Empfindung leicht vergleichen läßt. Geht dagegen der variable Reiz r_1 dem konstanten r voraus, so wird die durch letzteren erregte Empfindung keine konstante Größe, weil sie sich wegen der Bahnung verhält, als rührte sie von dem Reize $r + u r_1^v$ her. In diesem Falle hat man also eigentlich keine konstante Normalempfindung, mit welcher die variable verglichen wird, und hierdurch erschwert sich die Beurteilung, der Erfahrung nach, recht bedeutend. Man wird also gewöhnlich darauf rechnen können, die genaueren Werte durch Bestimmung des r_2 zu erhalten. Daraus sind die Werte $\varrho = \frac{r - r_2}{r}$ (Gleich. 5a) leicht zu berechnen, und wie dann ferner u und v zu bestimmen sind, soll später (Kap. 16) eingehend dargelegt werden.

B. Zufällige Fehler.

5. *Das Gaufssche Fehlergesetz.* Als zufällige Fehler bezeichnet man, wie schon oben S. 6 hervorgehoben, solche bei Wiederholung einer Messung vorkommenden Fehler, die von zahlreichen verschiedenen, in allen möglichen Kombinationen zusammenwirkenden Fehlerursachen herrühren. Die Größe des bei jeder einzelnen Messung gemachten Fehlers läßt sich unter diesen Umständen nicht berechnen, weil man außer stande ist, die eben vorliegende Kombination der Fehlerursachen zu bestimmen; es läßt sich nur die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines bestimmten Fehlers angeben. Um einen analytischen Ausdruck dieser Wahrscheinlichkeit abzuleiten, kann man von der Hypothese ausgehen, daß der Beobachtungsfehler die algebraische Summe einer unendlich großen Anzahl elementärer Fehler ist, die alle gleichen Wert haben und ebensowohl positiv als negativ sein können. Hieraus folgt zuvörderst, daß in einer sehr großen — streng genommen: unendlich großen — Anzahl Messungen positive und negative Fehler bestimmter Größe gleich häufig vorkommen werden. Dann wird aber die arithmetische Mitte sämtlicher Messungen den genauen Wert der gemessenen Größe angeben. Es sei dieser Wert a, der n_1 mal mit den Fehlern $+f_1$ und $-f_1$, n_2 mal mit den Fehlern $+f_2$ und $-f_2$ usw. gemessen worden ist. Die arithmetische Mitte der Messungsresultate wird dann:

$$\frac{n_1(a+f_1)+n_1(a-f_1)+n_2(a+f_2)+n_2(a-f_2)+\;.\;.\;.\;.\;.}{2(n_1+n_2+n_3+\;.\;.\;.\;.\;.} = a.$$

Nun ist es allerdings praktisch unmöglich, eine unendlich große Anzahl Messungen einer gegebenen Größe auszuführen, und folglich darf man auch nicht behaupten, daß die arithmetische Mitte der Messungsresultate den wahren Wert der gemessenen Größe ergebe. Die arithmetische Mitte der Einzelmessungen kann uns in praxi nur den wahrscheinlichen Wert der Messung geben, indem sie von den zufälligen Fehlern möglichst befreit ist, und zwar um so vollständiger, je mehr Messungen mit gleicher Genauigkeit ausgeführt worden sind. Wenn also eine Messung n_1 mal den Wert a_1, n_2 mal a_2, n_3 mal a_3 usw. gegeben hat, wird das wahrscheinliche Resultat der Messung, a_m:

$$a_m = \frac{n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + \ldots\ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots} \quad . \quad . \quad \text{(Gleich. 7).}$$

Aus der oben erwähnten Hypothese von der Natur der zufälligen Fehler folgt ferner, daß die relative Häufigkeit, mit welcher bestimmte Fehler vorkommen werden, eine Funktion ihrer Größe ist. Es besteht also eine gesetzmäßige Beziehung zwischen der Größe eines Fehlers und der Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens. Dieses Gesetz, das zuerst von Gauß angegeben wurde, heißt das Gaußsche Fehlergesetz. In betreff der mathematischen Ableitung desselben muß auf die Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwiesen werden. Hier brauchen wir überhaupt nicht auf den analytischen Ausdruck des Gesetzes zurückzugehen, weil behufs der praktischen Anwendung die Beziehung zwischen Fehlergröße und Wahrscheinlichkeit berechnet und tabellarisch zusammengestellt ist. Zum rechten Verständnis dieser Tabelle sind jedoch einige Erklärungen vonnöten.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß man nicht ganz allgemein die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von z. B. 3 mm Größe angeben kann. Handelt es sich um die Ausmessung eines einige Meter langen Bandes mittels eines gewöhnlichen Maßstabes, so wird ein Fehler von 3 mm sehr leicht vorkommen können, und seine Wahrscheinlichkeit ist mit andern Worten sehr groß. Handelt es sich aber darum, ein dem bloßen Auge unsichtbares Objekt unter dem Mikroskope mit einer Genauigkeit von 0,001 mm auszumessen, so wird ein Fehler von 3 mm Größe schlechterdings unmöglich, und seine Wahrscheinlichkeit ist also gleich Null. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bestimmter Größe, f, ist augenscheinlich von der Genauigkeit h der Messungen abhängig. Je größer das

„Präzisionsmaß" h ist, um so kleiner wird der Fehler f sein, der einer bestimmten Wahrscheinlichkeit entspricht, und umgekehrt, je kleiner h ist, um so größer wird f. Es ist also nicht die Wahrscheinlichkeit einer absoluten Fehlergröße f, sondern die Wahrscheinlichkeit des Produktes $f \cdot h$, die berechnet werden kann. In der am meisten zur Verwendung kommenden Tabelle ist übrigens nicht die relative Wahrscheinlichkeit der einzelnen Fehler $\pm fh$, sondern dagegen die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von Fehlern zwischen den Grenzen $-fh$ und $+fh$ angegeben. Diese letztere Größe, die Wahrscheinlichkeit der Fehler zwischen $-fh$ und $+fh$, bezeichnen wir im folgenden als $[W]_{-fh}^{+fh}$. Da positive und negative Fehler gleich häufig vorkommen, ist die Wahrscheinlichkeit der Fehler zwischen $-fh$ und 0 gleich derjenigen der Fehler zwischen 0 und $+fh$. Man hat also:

$$[W]_{-fh}^{+fh} = 2[W]_{-fh}^{0} = 2[W]_{0}^{+fh}.$$

In Tab. 1 sind die Werte $[W]_{-fh}^{+fh}$, die den verschiedenen Werten fh entsprechen, mit einer für psychologische Bestimmungen hinreichenden Genauigkeit angegeben.

Um die Tab. 1 anwenden zu können, muß man zuvörderst die unbekannte Größe h für eine Reihe Messungen bestimmen. Dies geschieht durch Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers. Der wahrscheinliche Fehler w ist diejenige Grenze, die von den sämtlichen sowohl positiven als negativen Fehlern ebenso oft überschritten wie nicht erreicht wird. Oder mit andern Worten: innerhalb der Grenzen $-w$ und $+w$ liegen ebensoviele Fehler als außerhalb dieser Grenzen. Da die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt Fehler vorkommen, gleich 1, d. h. Gewißheit ist, wird die Wahrscheinlichkeit der Hälfte der Fehler gleich $\frac{1}{2}$; man hat also:

$$[W]_{-wh}^{+wh} = 0{,}5.$$

Aus Tab. 1 ist ersichtlich, daß derjenige Wert fh, der $W = 0{,}5$ entspricht, zwischen 0,47 und 0,48 liegt. Eine genauere Berechnung ergibt $wh = 0{,}476\,936$. Wenn wir also für eine gegebene Reihe Messungen w berechnen können, ist somit h bekannt.

Der wahrscheinliche Fehler wird auf folgende Weise berechnet. Es seien $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ die Resultate von n verschiedenen Messungen derselben Größe; der mittlere Wert

Tabelle 1.

Die Wahrscheinlichkeit $[W]_{-fh}^{+fh}$, daß Fehler innerhalb der Grenzen $-fh$ und $+fh$ liegen.

fh	$[W]_{-fh}^{+fh}$	fh	$[W]_{-fh}^{+fh}$	fh	$[W]_{-fh}^{+fh}$	fh	$[W]_{-fh}^{+fh}$	fh	$[W]_{-fh}^{+fh}$
0,01	0,0113	0,36	0,3893	0,71	0,6847	1,12	0,8868	1,82	0,9899
2	0226	7	3992	2	6914	4	8931	4	9907
3	0338	8	4090	3	6981	6	8991	6	9915
4	0451	9	4187	4	7047	8	9048	8	9922
5	0564	0,40	4284	5	7112	1,20	9103	1,90	9928
6	0676	0,41	4380	6	0,7175	1,22	0,9155	1,92	0,9934
7	0789	2	4475	7	7238	4	9205	4	9939
8	0901	3	4569	8	7300	6	9252	6	9944
9	1013	4	4662	9	7361	8	9297	8	9949
0,10	1125	5	4755	0,80	7421	1,30	9340	2,00	9953
0,11	0,1236	6	4847	0,81	0,7480	1,32	0,9381	2,05	0,9963
2	1348	7	4938	2	7538	4	9419	10	9970
3	1459	8	5028	3	7595	6	9456	15	9976
4	1570	9	5117	4	7651	8	9490	20	9981
5	1680	0,50	5205	5	7707	1,40	9523	2,25	9985
6	1790	0,51	0,5292	6	0,7761	1,42	0,9554	2,30	0,9989
7	1900	2	5379	7	7814	4	9583	35	9991
8	2009	3	5465	8	7867	6	9611	40	9993
9	2118	4	5549	9	7918	8	9637	45	9995
0,20	2227	5	5633	0,90	7969	1,50	9661	2,50	9996
0,21	0,2335	6	5716	0,91	0,8019	1,52	0,9684	2,55	0,9997
2	2443	7	5798	2	8068	4	9706	60	9998
3	2550	8	5879	3	8116	6	9726	65	9998
4	2657	9	5959	4	8163	8	9746	70	9999
5	2763	0,60	6039	5	8209	1,60	9764	2,75	9999
6	2869	0,61	0,6117	6	0,8254	1,62	0,9780	2,80	0,9999
7	2974	2	6194	7	8299	4	9796	85	9999
8	3079	3	6271	8	8342	6	9811	90	1,0000
9	3183	4	6346	9	8385	8	9825	95	0000
0,30	3286	5	6420	1,00	8427	1,70	9838	3,00	0000
0,31	0,3389	6	6494	1,02	0,8508	1,72	0,9850		
2	3491	7	6566	4	8587	4	9861		
3	3593	8	6638	6	8661	6	9872		
4	3694	9	6708	8	8733	8	9882		
5	3794	0,70	6778	1,10	8802	1,80	9891		

dieser Messungsresultate sei a_m. Die gemachten, teils positiven, teils negativen Fehler sind dann $f_1 = a_1 - a_m$, $f_2 = a_2 - a_m$, ... $f_n = a_n - a_m$. Diese Fehler werden nun quadriert und die Quadrate addiert; die Summe wird mit n dividiert, aus dem Quotienten die Quadratwurzel gezogen und die resultierende Größe mit 0,67449 multipliziert. Das Resultat ist der wahrscheinliche Fehler w,

dessen Berechnung mathematisch also folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$w = 0{,}67449 \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2}{n}} = 0{,}67449 \sqrt{\frac{[f^2]}{n}} \ldots \text{(Gleich. 8)}\,[1].$$

Hat man w berechnet, kann $h = \frac{0{,}476936}{w}$ bestimmt werden; in der Praxis ist es aber viel bequemer, h zu eliminieren. Dividiert man nämlich die Werte fh der Tab. 1 mit $wh = 0{,}476936$, so sind die Quotienten $\frac{fh}{wh} = \frac{f}{w}$. Man kann also aus der Tab. 1 eine neue Tabelle berechnen, welche die Wahrscheinlichkeit der Fehler innerhalb der Grenzen $-\frac{f}{w}$ und $+\frac{f}{w}$ angibt. Ist aber die Wahrscheinlichkeit der Fehler zwischen diesen Grenzen z. B. 0,456, so heißt dies mit anderen Worten nur, daß unter 1000 Messungsfehlern 456 zwischen den genannten Grenzen liegen werden. Man kann also die Anzahl A der Fehler, die z. B. in 1000 Messungen innerhalb bestimmter Grenzen vorkommen werden, tabellarisch aufstellen. Eine solche Zusammenstellung, die dem praktischen Bedarf völlig genügen wird, ist in Tab. 2 gegeben.

Tabelle 2.

Die Anzahl A der Fehler, die in 1000 Messungen innerhalb der Grenzen $-\frac{f}{w}$ und $+\frac{f}{w}$ liegen.

$\pm\frac{f}{w}$	A	$\pm\frac{f}{w}$	A	$\pm\frac{f}{w}$	A	$\pm\frac{f}{w}$	A
0	0	1,0	500	2,0	823	3,0	957
0,1	54	1,1	542	2,1	843	3,1	963
0,2	107	1,2	582	2,2	862	3,2	969
0,3	160	1,3	619	2,3	879	3,3	974
0,4	212	1,4	655	2,4	894	3,4	978
0,5	264	1,5	688	2,5	908	3,5	982
0,6	314	1,6	720	2,6	920	3,6	985
0,7	363	1,7	749	2,7	931	3,7	988
0,8	411	1,8	776	2,8	941	3,8	990
0,9	456	1,9	800	2,9	949	4,0	993

[1]) Ist die Zahl n grofs, wird das Quadrieren der Fehler eine recht umständliche Arbeit; man kann w dann aber einfacher nach der folgenden Formel berechnen:

$$w = 0{,}8453 \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}{n} \quad \text{(Gleich. 8a)}.$$

Die Vorzeichen der Fehler werden hier aufser acht gelassen.

Tab. 2 bietet das einfachste Mittel dar, um sich zu vergewissern, daß die Fehler einer Messung sich dem Gaußschen Gesetze gemäß verteilen. Wenn sämtliche Fehler und daraus w berechnet sind, braucht man nur zu untersuchen, wie viele der tatsächlich vorkommenden Fehler zwischen den Grenzen $-0,1\,w$ und $+0,1\,w$, $-0,2\,w$ und $+0,2\,w$ usw. liegen. Stimmen diese Zahlen mit den Werten A der Tab. 2, so sind die Fehler auch wirklich zufällig, und dann — und nur in diesem Falle — ist die arithmetische Mitte der Messungen der wahrscheinliche Wert der gemessenen Größe. Wenn die tatsächliche Streuung der Fehler dagegen nicht mit der berechneten übereinstimmt, dann sind die Fehler auch nicht bloß zufällig, und die Zahlen müssen dann ganz anders behandelt werden, um ein richtiges Resultat zu geben. Deshalb sollte eigentlich stets eine solche Prüfung der Streuung der Fehler unternommen werden, weil nur dadurch die Richtigkeit der Voraussetzung: daß das Gaußsche Gesetz für die betreffenden Messungen gültig ist, dargetan werden kann. Selbstverständlich braucht man zu diesem Zwecke keineswegs 1000 Messungen derselben Größe auszuführen; man kann sich mit einer viel geringeren Anzahl, z. B. 100 oder sogar 50, begnügen, und die in jedem Intervalle vorkommende Anzahl der Fehler wird dann nur $\frac{1}{10}$ bez. $\frac{1}{20}$ der Werte A (Tab. 2). Ferner ist es auch nicht notwendig, die in jedem Intervalle liegende Anzahl Fehler zu bestimmen; es genügt vollständig, aufzuzählen, wie viele Fehler innerhalb der Grenzen $\pm 0,1\,w$, $\pm 0,3\,w$, $\pm 0,5\,w$, $\pm w$, $\pm 1,5\,w$, $\pm 2\,w$ und $\pm 3\,w$ liegen. Zeigen diese Zahlen nur hinreichende Übereinstimmung mit den berechneten Werten A der Tab. 2, so ist die Gültigkeit des Gaußschen Gesetzes als dargetan zu betrachten.

Gehen wir davon aus, daß die Verteilung der Fehler in einem gegebenen Falle sich als dem Fehlergesetze entsprechend erwiesen hat, so kann noch eine andere wesentliche Fehlergröße berechnet werden. Es wurde oben hervorgehoben, daß der Mittelwert a_m wegen der endlichen Anzahl der Beobachtungen nicht das wahre, sondern nur das wahrscheinliche Resultat der Messungen angibt. Es erhebt sich nun die Frage, wie groß die wahrscheinliche Abweichung des Mittelwertes a_m von dem unbekannten wahren Werte der gemessenen Größe ist. Der Fehlertheorie zufolge erhält man diese Abweichung f_w, den sogenannten „wahrscheinlichen Fehler des Mittelwertes“, wenn w mit $\sqrt{n-1}$ dividiert wird; also:

$$f_w = \frac{w}{\sqrt{n-1}} = 0{,}67449 \sqrt{\frac{[f^2]}{n(n-1)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gleich. 8 b).}$$

Das wahre Resultat der Messungen liegt dann zwischen den Grenzen $a_m + f_w$ und $a_m - f_w$; jedenfalls kann man 1 gegen 1 wetten, daß es hier liegt.

Oft ist man genötigt, sich auf eine so geringe Anzahl Einzelmessungen, z. B. 10 oder noch weniger zu beschränken, daß die Prüfung der Gültigkeit des Fehlergesetzes unmöglich wird. In diesem Falle hat es auch keinen Zweck, den wahrscheinlichen Fehler nach Gleich. 8 zu berechnen; man gibt dann die Genauigkeit der Messung einfach durch den durchschnittlichen Fehler f_m an:

$$f_m = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}{n} = \frac{[f]}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gleich. 9).}$$

Bei der Berechnung des f_m werden nur die numerischen Werte f_1, f_2 usw. berücksichtigt, indem vorausgesetzt wird, daß positive und negative Fehler gleich häufig vorkommen, so daß f_m selbst sowohl negativ als positiv sein kann.

Gleich. 8a und 9 zeigen, daß $w = 0{,}8453\ f_m$. Um die Gültigkeit des Gaußschen Gesetzes in einem vorliegenden Falle zu prüfen, begnügt man sich oft damit, zu untersuchen, ob das erwähnte Verhältnis zwischen w und f_m zutrifft; selbstverständlich ist w dann nach Gleich. 8 zu berechnen. Diese Prüfung ist aber eine durchaus illusorische, wenn man sich nicht zugleich vergewissert, daß positive und negative Fehler gleich häufig vorkommen; das Verhältnis $w/f_m = 0{,}8453$ kann nämlich auch bei einer entschieden unsymmetrischen Verteilung der Fehler stattfinden. Anderseits findet man gewöhnlich auch kleinere Abweicnungen von der Zahl 0,8453 selbst da, wo die genaue Prüfung der Fehlerverteilung eine genügende Übereinstimmung mit dem Gaußschen Gesetze dargetan hat. Eine zuverlässige Prüfung kann also nur dann unternommen werden, wenn so viele Beobachtungen vorliegen, daß man die Verteilung der Fehler untersuchen kann. Setzt man dessenungeachtet die Gültigkeit des Fehlergesetzes voraus, so läßt sich der wahrscheinliche Fehler des Mittelwertes, f_w, nach der Formel:

$$f_w = \frac{w}{\sqrt{n-1}} = 0{,}8453 \cdot \frac{f_m}{\sqrt{n-1}} = 0{,}8453 \cdot \frac{[f]}{n\sqrt{n-1}} \quad . \, . \, \text{(Gleich. 9a)}$$

berechnen, wenn n aber klein und eine unsymmetrische Fehlerstreuung nicht ausgeschlossen ist, so muß darauf ge-

rechnet werden, daß die mögliche Abweichung des Mittelwertes vom unbekannten wahren Werte dem durchschnittlichen Fehler gleich werden kann.

6. *Graphische Darstellung der Fehlerstreuung.* Oft ist es wünschenswert, die Streuung der Fehler gemessener Größen graphisch darstellen zu können, um ein anschauliches Bild von der Genauigkeit verschiedener Messungen zu gewinnen. Dies ist denn auch leicht tunlich, unter der Voraussetzung, daß das Gaußsche Gesetz für die betreffenden Messungen gültig ist. Setzt man die Fehler als Abszissen ab, kann die relative Häufigkeit ihres Vorkommens, d. h. ihre Wahrscheinlichkeit, als Ordinaten dargestellt werden. Man braucht also nur die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Fehlers zu kennen, die sich leicht aus Tab. 1 berechnen läßt. Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die Wahrscheinlichkeit der Fehler zwischen z. B. $-0{,}48$ und $+0{,}48$ gleich 0,5028, und die Wahrscheinlichkeit der Fehler innerhalb der Grenzen $-0{,}47$ und $+0{,}47$ gleich 0,4938 ist. Ziehen wir diese beiden Größen voneinander ab, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit der sowohl negativen als positiven Fehler in dem Intervalle 0,47 bis 0,48. Die Hälfte dieser Größe wird also die Wahrscheinlichkeit entweder der positiven oder der negativen Fehler in dem erwähnten Intervalle. Auf analoge Weise kann die Wahrscheinlichkeit der Fehler in jedem beliebigen Intervalle berechnet werden[1]), und diese Größen als Ordinaten abgesetzt geben ein Bild von der Streuung der Fehler nach dem Gaußschen Gesetze. Es ist also nur eine tabellarische Übersicht über die Wahrscheinlichkeiten W_f des einzelnen Fehlers erforderlich; eine solche Tabelle wird aber in der Praxis am leichtesten anwendbar, wenn die Fehler durch $\pm \frac{f}{w}$ ausgedrückt werden und als Einheit des W_f die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichen Fehlers W_w genommen wird. Diese Größen sind in Tab. 3 zusammengestellt.

Um die Anwendung der Tab. 3 zu beleuchten, nehmen wir folgendes Beispiel. Zwei Gröfsen v_o und v_u, die in einer bestimmten Beziehung zueinander stehen, sind mehrmals gemessen worden; die nach Gleich. 7 berechneten mittleren Werte sind $v_o = 123{,}0$ und $v_u = 118{,}2$, die nach Gleich. 8 berechneten wahrscheinlichen Fehler $w_o = 2{,}98$

[1]) Bei der Berechnung der verschiedenen Tabellen geht man gewöhnlich den umgekehrten Weg, indem erst aus dem Gaufsschen Fehlergesetze die Wahrscheinlichkeit des einzelnen Fehlers und darauf durch Quadratur die Wahrscheinlichkeit der Fehler innerhalb bestimmter Grenzen berechnet wird; dies ist hier jedoch ohne Bedeutung.

Tabelle 3.

Die Wahrscheinlichkeit W_f der Fehler $\pm \frac{f}{w}$ in der Einheit der Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichen Fehlers ausgedrückt.

$\frac{\pm f}{w}$	W_f	$\frac{\pm f}{w}$	W_f	$\frac{\pm f}{w}$	W_f	$\frac{\pm f}{w}$	W_f
0	1,255	1,0	1,000	2,0	0,504	3,0	0,163
0,1	1,252	1,1	0,953	2,1	0,460	3,1	0,140
0,2	1,245	1,2	0,905	2,2	0,417	3,2	0,123
0,3	1,235	1,3	0,854	2,3	0,377	3,3	0,106
0,4	1,215	1,4	0,803	2,4	0,339	3,4	0,091
0,5	1,190	1,5	0,752	2,5	0,302	3,5	0,078
0,6	1,160	1,6	0,701	2,6	0,270	3,6	0,066
0,7	1,125	1,7	0,650	2,7	0,239	3,7	0,056
0,8	1,085	1,8	0,600	2,8	0.212	3,8	0,047
0,9	1,045	1,9	0,552	2,9	0,186	4,0	0,033

und $w_u = 1{,}56$. Die Untersuchung der Streuung der Fehler hat ergeben, dafs dieselben sich dem Gaufsschen Gesetze gemäfs verteilen; wir wünschen nun eine graphische Darstellung dieser Verteilung. Die gemessenen Gröfsen werden als Abszissen abgesetzt (Fig. 2), und wir wählen eine ganz willkürliche Länge zum Ausdruck der Wahrscheinlichkeit z. B. des w_o. Diese Länge y_o (in

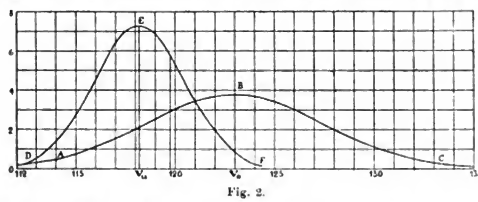


Fig. 2.

der Figur gleich 3) wird in den Punkten $123{,}0 \pm 2{,}98$ als Ordinate abgesetzt, und damit sind sämtliche übrige Punkte dieser Fehlerkurve bestimmt, indem das Verhältnis der verschiedenen Ordinaten zur Ordinate des wahrscheinlichen Fehlers eben die in Tab. 3 unter W_f angegebenen Zahlen sind. Der Abszisse 123,0 entspricht der Fehler $\pm \frac{f}{w} = 0$, dessen Ordinate $y = 1{,}255\, y_o$; den Fehlern $\pm\, 0{,}5\, w$, also den Abszissen 121,51 und 124,49, entspricht die Ordinate $y = 1{,}190\, y_o$, usw. Auf diese Weise können so viele Punkte, als man für notwendig hält, bestimmt werden, und die durch die Endpunkte der Ordinaten gezeichnete Kurve ABC stellt die Verteilung der Fehler dar.

Durch die oben erwähnte Wahl der einen Ordinatengröfse ist indessen nicht nur die Kurve *ABC*, sondern auch die Kurve *DEF* bestimmt. Die Kurve *ABC* umfafst nämlich sämtliche mögliche Fehler der Messung des r_o; die Wahrscheinlichkeit sämtlicher Fehler ist aber = 1. Das zwischen der Kurve *ABC* und der Abszissenachse eingeschlossene Areal ist also das Mafs der Wahrscheinlichkeit sämtlicher Fehler, und ebenso grofs mufs das Areal zwischen der Kurve *DEF* und der Abszissenachse gemacht werden, wenn die beiden Kurven die Verteilung der Fehler in einem gemeinsamen Mafse ausdrücken sollen. Mit der möglichst grofsen Annäherung werden aber die beiden Areale gleich grofs, wenn $\frac{y_u}{y_o} = \frac{w_o}{w_u}$. In dem vorliegenden Beispiele ist $\frac{w_o}{w_u} = \frac{2,98}{1,56} = 1,92$, also wird $y_u = 1,92\,y_o$, und darauf können die Ordinaten der Kurve *DEF* mittels Tab. 3 auf dieselbe Weise berechnet werden, wie die Ordinaten der Kurve *ABC*. — Wir werden weiter unten auf dies Beispiel zurückkommen.

Es wurde oben (S. 25) erwähnt, daß man die Genauigkeit einer Messung oft durch den durchschnittlichen Fehler f_m angibt. Die Wahrscheinlichkeit W_m dieses Fehlers ist in vielen Beziehungen von Interesse; es läßt sich dartun, was hier nicht näher erörtert werden kann, daß $W_m = 0,912$, wenn die Wahrscheinlichkeit in derselben Einheit ausgedrückt wird, die den Größen W_f der Tab. 3 zugrunde gelegt ist. Die Wahrscheinlichkeit W_o des Fehlers Null ist, Tab. 3 zufolge, $W_o = 1,255$. Es verhalten sich also $\frac{W_m}{W_o} = \frac{0,912}{1,255} = 0,727$. Dieser Bruch ist annäherungsweise gleich $^3/_4$, genauer gleich $^8/_{11}$; es wird von diesem Verhältnis im folgenden öfter die Rede sein. Mittels Tab. 3 läßt sich ferner berechnen, daß die Wahrscheinlichkeit $W_m = 0,912$ dem Fehler $\frac{f}{w} = 1,185$ entspricht, was mit andern Worten heißt, daß der durchschnittliche Fehler $f_m = 1,185\,w$, oder $w = 0,8453\,f_m$. Je genauer das Fehlergesetz für eine Beobachtungsreihe gültig ist, um so mehr nähert sich also das Verhältnis zwischen dem wahrscheinlichen und dem durchschnittlichen Fehler dem Wert 0,8453, was eben durch Gleich. 8a ausgedrückt ist.

C. Variable Fehler.

7. *Die Ursachen der variablen Fehler.* Die variablen Fehler, mit welchen wir es bei den psychologischen Messungen zu tun haben, sind aller Wahrscheinlichkeit nach verschiedenen Ursprunges. Wir kennen unzweifelhaft noch keineswegs alle

diejenigen Ursachen, die solche Fehler herbeiführen können; es kommen im folgenden nur zwei Faktoren, die als typische Repräsentanten derartiger Fehlerursachen angesehen werden können, zur Besprechung.

Wie oben hervorgehoben, können zufällige Fehler nur von solchen Ursachen herrühren, die das Resultat einer Messung ebenso leicht vergrößern wie vermindern können. Nur unter dieser Voraussetzung können nämlich positive und negative Fehler gleich häufig vorkommen, was eine wesentliche Bedingung für die Gültigkeit des Fehlergesetzes ist. Sobald also ein die Messungsresultate beeinflussender Faktor nur einseitig schwanken kann, oder wenigstens häufiger in einer Richtung als in der entgegengesetzten schwankt, können die davon herrührenden Fehler nicht zu den zufälligen gerechnet werden. Dies gilt eben von der Aufmerksamkeit. Jede psychologische Messung ist nämlich mit maximaler Aufmerksamkeit auszuführen — selbstverständlich mit Ausnahme solcher Fälle, wo man eben beabsichtigt, die Wirkung der verschiedenen Anspannung der Aufmerksamkeit zu untersuchen. Die Notwendigkeit der maximalen Konzentration ist dadurch gegeben, daß die Aufmerksamkeit sich tatsächlich mehr oder weniger anspannen läßt, wir aber kein subjektives Maß für den jeweilig vorhandenen Grad der Konzentration besitzen. Da ferner jede psychische Tätigkeit sich in irgendeiner Richtung mit dem Aufmerksamkeitsgrade verändert, so sind konstante Resultate überhaupt nur dann zu erwarten, wenn die Konzentration der Aufmerksamkeit bei wiederholten Messungen konstant bleibt. Der einzige Konzentrationsgrad, der immer zustande gebracht werden kann, ist aber der maximale. Nur wenn die Vp. ihr äußerstes tut, werden die Messungen unter konstanten subjektiven Bedingungen ausgeführt, wobei selbstverständlich dahingestellt bleiben muß, ob „dem Äußersten“, der maximalen Konzentration der Aufmerksamkeit, auch eine konstante Intensität und Kapazität des psychophysiologischen Vorganges entsprechen. Wie dem nun auch sei, so leuchtet es doch ein, daß nur dann auf konstante Resultate zu rechnen ist, wenn die subjektive Bedingung, die maximale Aufmerksamkeitskonzentration, erfüllt wird. Jede kleine Störung, jede zufällige Ablenkung der Aufmerksamkeit wird dann aber eine Herabsetzung der psychischen Tätigkeit zur Folge haben, während umgekehrt Ursachen, die eine übermaximale Anspannung der Aufmerksamkeit und somit eine

Verstärkung der psychischen Tätigkeit herbeiführen können. schwerlich vorkommen werden. Die einfache Folge hiervon muß aber die werden, daß die Verteilung der Fehler bei wiederholten Messungen eine unsymmetrische wird, indem je den Umständen nach entweder positive oder negative Fehler überwiegen.

Die Ablenkung der Aufmerksamkeit kann als Type solcher Fehlerursachen angesehen werden, die eine einseitige Verteilung der Fehler bewirken. Ein davon ziemlich verschiedener Typus läßt sich am besten durch eine Annahme darstellen. Es wurde oben bemerkt, wir hätten keine Sicherheit, daß die maximale Konzentration der Aufmerksamkeit eine konstante Größe sei — tatsächlich schwankt ja sowohl unsere geistige als körperliche Arbeitsfähigkeit von Tag zu Tag, was oft mit dem Wetter in Beziehung gesetzt wird. Nehmen wir nun, der Einfachheit halber, an, daß das Maximum der Konzentration eine Funktion des Luftdruckes sei. Es leuchtet unmittelbar ein, daß Messungen, die an verschiedenen Tagen wiederholt wurden, unter diesen Umständen ganz unregelmäßige Schwankungen darbieten können. Einer Reihe übereinstimmender Werte, die z. B. bei Normaldruck ausgeführt waren, könnten sich plötzlich, bei sinkendem Barometer, Werte mit wachsenden negativen Fehlern anschließen usw. Unter der angenommenen Voraussetzung würde jede denkbare Möglichkeit der Fehlerstreuung vorkommen können. Und die Fehler dürften erst dann als zufällige behandelt werden, wenn eine so ungeheure Anzahl Messungen angestellt wären, daß sämtliche während der Versuchsdauer vorgekommene Größen des Luftdruckes die Resultate gleichmäßig beeinflußt hätten. Nun ist die hier gemachte Annahme durchaus kein luftiges Phantasiegebilde. Das Maximum der Aufmerksamkeitskonzentration ist zwar keine einfache Funktion des Luftdruckes, es ist aber von verschiedenen meteorologischen Faktoren in noch unbekannter Weise abhängig. Folglich können auch unter gewissen Umständen, wenn gleichartige Messungen an verschiedenen Tagen ausgeführt wurden, ziemlich unregelmäßige Fehlerstreuungen gefunden werden. Es fragt sich dann, wie solche Messungen zu berechnen sind.

Können wir nicht zur Gewißheit gelangen, so begnügen wir uns mit der erreichbaren Wahrscheinlichkeit. Am wahrscheinlichsten ist aber der Fall, dessen Eintreten am häufigsten erwartet werden kann. Liegen also eine Reihe Messungen

vor, so wird das wahrscheinliche Resultat stets der Wert sein, um welchen sich die Bestimmungen am dichtesten scharen. Denken wir uns die einzelnen gemessenen Werte als Abszissen, *OA* bis *OB* (s. Fig. 3), und die Häufigkeit ihres Vorkommens als Ordinaten abgesetzt, so ist also die Streuung der Fehler durch die Kurve *ACB* dargestellt. Der wahrscheinliche Wert der gemessenen Größe wird dann das Dichtigkeitsmittel *OD*, indem *DC* die größte Ordinate und *OD* folglich eben derjenige Wert ist, um welchen sich die Beobachtungen am dichtesten scharen. Können wir also die Abszisse *OD* des Maximalpunktes *C* berechnen, so ist die Aufgabe gelöst.

Dies ist aber immer möglich. Die Häufigkeit y eines gemessenen Wertes ist zwar im vorliegenden Falle eine unbekannte Funktion seiner Größe x, wenn man aber nur eine genügende Anzahl zusammengehörender Werte x und y kennt, läßt sich der einem gegebenen Werte y entsprechende Wert x leicht berechnen. Die hierzu erforderlichen mathematischen Operationen werden in der sog. Interpolationsrechnung behandelt, die besonders für die messende Psychologie eine vielseitige Anwendbarkeit besitzt. Es soll deshalb im folgenden ein Grundriß dieser Lehre mit besonderer Berücksichtigung der psychologischen Zwecke dargestellt werden.

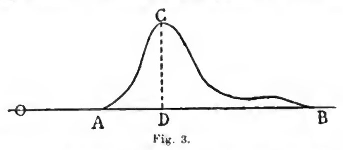


Fig. 3.

8. *Die Funktion und ihre Differenzen.* Es sei $y = F(x)$, wo die Funktion F unbekannt ist, während eine Reihe Werte des y: $y_1, y_2, y_3 \ldots$, den Werten $x_1, x_2, x_3 \ldots$ entsprechend, bekannt sind. Die unabhängige Variable x wird das Argument der Funktion genannt, und der Einfachheit halber nehmen wir vorläufig an, daß die Werte $x_1, x_2, x_3 \ldots$ äquidistant sind, so daß also die Differenz der Argumente:

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \ldots = d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gleich. 10).}$$

Wir bilden nun die Funktionsdifferenzen erster Ordnung:

$$\Delta_1^{\mathrm{I}} = y_2 - y_1,\ \Delta_2^{\mathrm{I}} = y_3 - y_2,\ \Delta_3^{\mathrm{I}} = y_4 - y_3 \text{ usw.};$$

aus diesen Differenzen ferner die Differenzen zweiter Ordnung:

$$\Delta_1^{\mathrm{II}} = \Delta_2^{\mathrm{I}} - \Delta_1^{\mathrm{I}},\ \ \Delta_2^{\mathrm{II}} = \Delta_3^{\mathrm{I}} - \Delta_2^{\mathrm{I}} \ldots\ldots \text{usw.};$$

darauf die Differenzen dritter Ordnung:

$$\Delta_1^{\mathrm{III}} = \Delta_2^{\mathrm{II}} - \Delta_1^{\mathrm{II}},\ \ \Delta_2^{\mathrm{III}} = \Delta_3^{\mathrm{II}} - \Delta_2^{\mathrm{II}} \ldots\ldots \text{usw.}$$

Die zusammengehörenden Werte x und y nebst den verschiedenen Differenzen lassen sich übersichtlich so darstellen, wie es im folgenden Schema angegeben ist; in praxi wird man es am bequemsten finden, diese Aufstellungsweise von oben nach unten anzuwenden. Die Subtraktion wird selbstverständlich überall in der nämlichen Richtung ausgeführt, so daß z. B. stets die obenstehende von der untenstehenden Zahl gezogen wird; die Differenzen werden stets mit Vorzeichen angeführt. Wir haben also:

Arg	$F(x)$							
x_1	y_1							
		$\triangle_1^{I}$						
x_2	y_2		$\triangle_1^{II}$					
		$\triangle_2^{I}$		$\triangle_1^{III}$				
x_3	y_3		$\triangle_2^{II}$		$\triangle_1^{IV}$			
		$\triangle_3^{I}$		$\triangle_2^{III}$		$\triangle_1^{V}$		
x_4	y_4		$\triangle_3^{II}$		$\triangle_2^{IV}$		$\triangle_1^{VI}$	
		$\triangle_4^{I}$		$\triangle_3^{III}$		$\triangle_2^{V}$		$\triangle_1^{VII}$
x_5	y_5		$\triangle_4^{II}$		$\triangle_3^{IV}$		$\triangle_2^{VI}$	
		$\triangle_5^{I}$		$\triangle_4^{III}$		$\triangle_3^{V}$		
x_6	y_6		$\triangle_5^{II}$		$\triangle_4^{IV}$			
		$\triangle_6^{I}$		$\triangle_5^{III}$				
x_7	y_7		$\triangle_6^{II}$					
		$\triangle_7^{I}$						
x_8	y_8							

Hier sind die Differenzen sukzessiv gebildet, man kann aber auch die Größe jeder beliebigen Differenz sofort bestimmen.

Man hat nämlich:

$$\triangle_1^{II} = \triangle_2^{I} - \triangle_1^{I} = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\triangle_1^{III} = \triangle_2^{II} - \triangle_1^{II} = (\triangle_3^{I} - \triangle_2^{I}) - (\triangle_2^{I} - \triangle_1^{I}) = (y_4 - y_3) - (y_3 - y_2) - (y_3 - 2y_2 + y) = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so sieht man, daß die Koeffizienten hier den Koeffizienten des Binomialausdruckes $(a - b)^n$ gleich werden. Man hat folglich den allgemeinen Ausdruck:

$$\triangle_1^{n} = y_{n+1} - \frac{n}{1} y_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_{n-2} + \ldots . (-1)^n y_1 \ldots\ldots \text{ (Gleich. 11).}$$

Sucht man statt $\triangle_1^{n}$ die Differenz $\triangle_p^{n}$, so geht man von den Differenzen $\triangle_p^{I}$, $\triangle_p^{II}$ usw. aus und erhält dann den Ausdruck:

$$\triangle_p^{n} = y_{p+n} - \frac{n}{1} y_{p+n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_{p+n-2} - \ldots . (-1)^n y_p$$

(Gleich. 12).

Es läßt sich also eine beliebige Differenz durch die bekannten Funktionswerte y ausdrücken. Umgekehrt kann jeder

Funktionswert durch das erste Glied y_1 und die Differenzen ausgedrückt werden. Man hat nämlich:

$$y_2 = y_1 + \triangle_1^{\mathrm{I}}$$

$$y_3 = y_2 + \triangle_2^{\mathrm{I}}, \text{ wo } \triangle_2^{\mathrm{I}} = \triangle_1^{\mathrm{I}} + \triangle_1^{\mathrm{II}}, \text{ also: } y_3 = y_1 + 2\triangle_1^{\mathrm{I}} + \triangle_1^{\mathrm{II}}.$$

$$y_4 = y_3 + \triangle_3^{\mathrm{I}}, \text{ wo } \triangle_3^{\mathrm{I}} = \triangle_2^{\mathrm{I}} + \triangle_2^{\mathrm{II}}, \text{ aber: } \triangle_2^{\mathrm{II}} = \triangle_1^{\mathrm{II}} + \triangle_1^{\mathrm{III}};$$

folglich hat man:

$$y_4 = (y_1 + 2\triangle_1^{\mathrm{I}} + \triangle_1^{\mathrm{II}}) + (\triangle_1^{\mathrm{I}} + \triangle_1^{\mathrm{II}}) + (\triangle_1^{\mathrm{II}} + \triangle_1^{\mathrm{III}})$$
$$= y_1 + 3\triangle_1^{\mathrm{I}} + 3\triangle_1^{\mathrm{II}} + \triangle_1^{\mathrm{III}}.$$

Es ist hieraus ersichtlich, daß die Koeffizienten denjenigen des Binomialausdruckes $(a+b)^n$ gleich werden. Folglich erhält man den allgemeinen Ausdruck:

$$y_{n+1} = y_1 + \frac{n}{1}\triangle_1^{\mathrm{I}} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\triangle_1^{\mathrm{II}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle_1^{\mathrm{III}} + \ldots + \triangle_1^{n}$$

(Gleich. 13).

Der Funktionswert y_{n+1} entspricht dem Argumente x_{n+1}. Gleich. 10 zufolge ist aber $x_{n+1} = x_1 + nd$; also ist $y_{n+1} = F(x_1 + nd)$. Hier ist n, seiner Bedeutung gemäß, eine ganze Zahl. Nehmen wir aber an, daß wir zwischen x_1 und x_2 eine beliebige Anzahl Argumente mit der konstanten Distanz $\frac{d}{z}$ einschalten, und daß uns die entsprechenden Funktionswerte bekannt sind. Suchen wir jetzt, genau so wie oben, einen Ausdruck für den $(n+1)^{\text{ten}}$ dieser Funktionswerte, also den Wert: $y_{n+1} = F(x_1 + n\frac{d}{z})$, so erhalten wir eine Gleichung, die hinsichtlich der Form vollständig mit Gleich. 13 übereinstimmt. Der $(n+1)^{\text{te}}$ unserer neuen Funktionswerte entspricht aber dem $(\frac{n}{z}+1)^{\text{ten}}$ der ursprünglichen. Folglich ist es ohne Bedeutung, ob man in Gleich. 13 für n eine ganze Zahl oder einen Bruch einsetzt; die Formel ergibt in allen Fällen den dem Argumente $x_1 + nd$ entsprechenden Wert y.

In Gleich. 13 ist der gesuchte Funktionswert mittels y_1 und der Differenzen $\triangle_1$ ausgedrückt; man kann ihn aber selbstverständlich ebensowohl mittels y_p und der Differenzen $\triangle_p$ ausdrücken und erhält dann die allgemeinere Formel:

$$y_{p+n} = F(x_p + nd) = y_p + \frac{n}{1}\triangle_p^{\mathrm{I}} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\triangle_p^{\mathrm{II}} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots k}\triangle_p^{k} + \ldots\ldots \text{ (Gleich. 14).}$$

Diese Gleichung kann, je nach dem praktischen Bedarf, mannigfach umgestaltet werden, indem statt der in einer schrägen Linie stehenden Differenzen diejenigen einer Zickzacklinie eingeführt werden können. Wir werden später mehrere solche Formeln entwickeln; um uns den Übergang zur Rechnung mit beliebigen Argumenten zu erleichtern, führen wir hier nur eine Veränderung aus, indem n durch das unbekannte Argument x ausgedrückt wird. Setzen wir: $x_1 + n d = x$, so ist folglich $n = \frac{x - x_1}{d}$. Ferner wird:

$$n - 1 = \frac{x - (x_1 + d)}{d} = \frac{x - x_2}{d};\; n - 2 = \frac{x - (x_1 + 2d)}{d} = \frac{x - x_3}{d} \text{ usf.}$$

Werden diese Ausdrücke in Gleich. 13 eingesetzt, erhält man:

$$y = F(x) = y_1 + \frac{x - x_1}{1} \cdot \frac{\triangle_1^{\text{I}}}{d} + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\triangle_1^{\text{II}}}{d^2}$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\triangle_1^{\text{III}}}{d^3} + \ldots \text{ (Gleich. 15).}$$

Auf der rechten Seite der Gleich. 15 sind sämtliche Größen außer x bekannt; legt man also dem Argumente x einen Wert bei, so kann y berechnet werden. Wenn es aber möglich ist, auf diese Weise y als Funktion des x auszudrücken, indem die Argumente x_1, x_2 usw. äquidistant sind, muß ein ähnlicher Ausdruck auch dann möglich sein, wenn die Argumente keine konstante Differenz haben, also beliebig gewählt sind. Da es aber in diesem Falle keine konstante Differenz d gibt, können die Koeffizienten $\frac{\triangle_1^{\text{I}}}{d}$, $\frac{\triangle_2^{\text{II}}}{2d^2}$ usw. auch nicht unverändert bleiben. Wir setzen daher in Gleich. 15 statt dieser Koeffizienten die unbekannten Größen δ_1^{I}, δ_1^{II}, δ_1^{III} usw. ein, und erhalten dann:

$$y = F(x) = y_1 + (x - x_1)\,\delta_1^{\text{I}} + (x - x_1)(x - x_2)\,\delta_1^{\text{II}} + (x - x_1)(x - x_2)$$

$$(x - x_3)\,\delta_1^{\text{III}} + \ldots \text{ (Gleich. 16).}$$

Es wird jetzt die Aufgabe sein, die Werte dieser unbekannten Koeffizienten zu bestimmen, welche die Gleichung befriedigen.

Wenn $x = x_2$ gesetzt wird, so soll Gleich. 16 $y = y_2$ ergeben; folglich ist: $y_2 = y_1 + (x_2 - x_1)\,\delta_1^{\text{I}}$, woraus folgt: $\delta_1^{\text{I}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Wird ferner $x = x_3$ gesetzt, so soll $y = y_3$ sein, also:

$$y_3 = y_1 + (x_3 - x_1)\,\delta_1^{\text{I}} + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\,\delta_1^{\text{II}} \text{ oder:}$$

$$\delta_1^{\text{II}} = \frac{y_3 - y_1 - (x_3 - x_1)\,\delta_1^{\text{I}}}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) - (x_3 - x_1)\,\delta_1^{\text{I}}}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Setzt man hier, dem Ausdruck für δ_1^{I} analog, $\delta_2^{\mathrm{I}} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, so wird

$$\delta_1^{\mathrm{II}} = \frac{(x_3 - x_2)\,\delta_2^{\mathrm{I}} + (x_2 - x_1)\,\delta_1^{\mathrm{I}} - (x_3 - x_1)\,\delta_1^{\mathrm{I}}}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$= \frac{(x_3 - x_2)\,\delta_2^{\mathrm{I}} - (x_3 - x_2)\,\delta_1^{\mathrm{I}}}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{\delta_2^{\mathrm{I}} - \delta_1^{\mathrm{I}}}{x_3 - x_1}.$$

Man ersieht hieraus, daß δ_1^{II} aus δ_2^{I} und δ_1^{I} auf dieselbe Weise gebildet wird wie diese Größen aus y_3 und y_2 bez. y_2 und y_1. Man kann also folgendes Schema aufstellen:

$$\begin{array}{llllll}
x_1 & y_1 & & & & \\
 & & \delta_1^{\mathrm{I}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & & & \\
x_2 & y_2 & & \delta_1^{\mathrm{II}} = \frac{\delta_2^{\mathrm{I}} - \delta_1^{\mathrm{I}}}{x_3 - x_1} & & \\
 & & \delta_2^{\mathrm{I}} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} & & \delta_1^{\mathrm{III}} = \frac{\delta_2^{\mathrm{II}} - \delta_1^{\mathrm{II}}}{x_4 - x_1} & \\
x_3 & y_3 & & \delta_2^{\mathrm{II}} = \frac{\delta_3^{\mathrm{I}} - \delta_2^{\mathrm{I}}}{x_4 - x_2} & & \delta_1^{\mathrm{IV}} = \frac{\delta_2^{\mathrm{III}} - \delta_1^{\mathrm{III}}}{x_5 - x_1}. \\
 & & \delta_3^{\mathrm{I}} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} & & \delta_2^{\mathrm{III}} = \frac{\delta_3^{\mathrm{II}} - \delta_2^{\mathrm{II}}}{x_5 - x_2} & \\
x_4 & y_4 & & \delta_3^{\mathrm{II}} = \frac{\delta_4^{\mathrm{I}} - \delta_3^{\mathrm{I}}}{x_5 - x_3} & & \\
 & & \delta_4^{\mathrm{I}} = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} & & & \\
x_5 & y_5 & & & &
\end{array}$$

Geht man auf dem oben eingeschlagenen Wege weiter, indem in Gleich. 16 sukzessiv $x = x_4$, $x = x_5$ usw. gesetzt wird, so findet man, daß die Koeffizienten δ_1^{III}, δ_1^{IV} usw. eben diejenigen Werte erhalten, die in dem aufgestellten Schema berechnet sind und die „dividierten Differenzen" genannt werden. Gleich. 16 gilt also für beliebige Argumente, wenn als Koeffizienten die dividierten Differenzen eingesetzt werden; diese Formel ist die Newtonsche Interpolationsformel.

Gleich. 15 ist, wie leicht ersichtlich, nur ein spezieller Fall der Newtonschen Formel; setzt man nämlich $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = d$, so gehen die dividierten Differenzen in die Koeffizienten der Gleich. 15 über. Von einem theoretischen Gesichtspunkte aus würde es daher richtiger sein, die im folgenden darzustellenden Operationen aus der Newtonschen Formel zu entwickeln und dadurch ihre Gültigkeit für den allgemeineren Fall der dividierten Differenzen zu beweisen. Es handelt sich hier aber nur um die praktische Anwendung der Interpolationsrechnung auf die psychologischen Messungen, und wir wollen deshalb die Operationen mit dividierten Differenzen, die immer ziemlich verwickelt sind, womöglich vermeiden. Mithin soll hier nur die Interpolation und Extra-

polation mit nicht-dividierten Differenzen besprochen werden. Die hierfür geltenden Formeln werden auch fast immer dem Zwecke der Psychologen genügen, weil die Messungen so ausgeführt werden können, daß die gemessenen Werte äquidistanten Argumenten entsprechen. In dem seltenen Falle, wo eine solche Versuchsanordnung unpraktisch sein würde, wird man dann am besten aus den Beobachtungsresultaten die entsprechenden Funktionswerte für eine Reihe äquidistanter Argumente mittels Gleich. 16 berechnen, um dann fernere Operationen mit diesen berechneten Werten auszuführen. Um das Verfahren zu erläutern, betrachten wir das folgende Beispiel etwas näher.

Die Transmissionskoeffizienten eines keilförmigen Dunkelglases werden am besten auf die Weise bestimmt, dafs man die rotierende Scheibe, mit welcher das Glas verglichen wird, auf eine bestimmte Sektorgröfse einstellt, während der Verdunklungskeil vor dem Spalt des Photometers hin und her geschoben wird. Durch die Sektorgröfse ist ein gewisser Transmissionskoeffizient bestimmt, und die Messung ergibt den Punkt am Mafsstab des Keiles, wo die Lichtdurchlässigkeit eben der Sektorgröfse entspricht. Aus einer Reihe solcher Messungen resultiert also ein System von Transmissionskoeffizienten y als Funktion der Keillänge x. Da die gefundenen Werte x nur zufällig und ausnahmsweise äquidistant werden können, ist Gleich. 16 hier anzuwenden, wenn man die nicht gemessenen Werte y berechnen will. In Tab. 4 sind die Resultate einer solchen Messung angegeben; x ist die am Mafsstab abgelesene Keillänge, wo das Glas den Transmissionskoeffizienten y besitzt. Unter Dif. x

Tabelle 4.

x	*Dif.* x	y	δ^{I}	δ^{II}	(x)	(y)
18,5		0,778			20	0,760
	2,5		— 0,0112			
21		0,750		0,00076	30	0,698
	6		— 0,0047			
27		0,722		— 0,00023	40	0,610
	10		— 0,0083			
37		0,639		— 0,00006	50	0,543
	6		— 0,0093			
43		0,583		0,00018	60	0,489
	15		— 0,0055			
58		0,500		0,00002	70	0,439
	11		— 0,0051			
69		0,444		0,00002	80	0,383
	12		— 0,0046			
81		0,389		0	90	0,345
	12		— 0,0047			
93		0,333				

sind die Differenzen der aufeinanderfolgenden Werte x, unter δ' und δ'' die dividierten Differenzen der Funktionswerte y angegeben. Differenzen höherer Ordnung brauchen hier nicht mitgenommen zu werden, was im Kap. 12 dargetan wird; Gleich. 16 ist also in der Form:

$$y = y_1 + (x - x_1)\,\delta'_1 + (x - x_1)(x - x_2)\,\delta_1''$$

anzuwenden.

Wir wünschen nun die den äquidistanten Argumenten (x) entsprechenden Werte (y) zu berechnen. Wir haben dann z. B.:

$$y_{20} = 0{,}778 - (20-18{,}5)\;0{,}0112 + (20-18{,}5)\;(20-21)\;0{,}00076$$
$$= 0{,}760$$

$$y_{30} = 0{,}722 - (30-27)\;0{,}0083 - (30-27)\;(30-37)\;0{,}00006 = 0{,}698$$

usf.

Da die gemessenen Werte mit Fehlern behaftet sind, können die daraus berechneten Werte auch nicht fehlerlos sein; diese Fehler müssen erst ausgeglichen werden, ehe man weitere Berechnungen unternehmen kann. Die Fehlerausgleichung wird uns im Kap. 12 beschäftigen, wo dies Beispiel fortgesetzt wird.

9. *Interpolation und Extrapolation.* Unter Interpolation versteht man die Berechnung, durch welche Funktionswerte zwischen die gegebenen eingeschaltet werden, während Extrapolation die Bestimmung der Funktionswerte außerhalb der Grenzen der gegebenen bezeichnet. Die im vorigen Kapitel besprochene Aufgabe ist ein Beispiel der Interpolation mittels Newtons Formel; hier sollen, wie schon oben gesagt, nur die verschiedenen, für äquidistante Argumente geltenden Formeln entwickelt werden, wodurch man sich das Verfahren in den vorkommenden Fällen erleichtern kann.

Gleich. 13, bez. Gleich. 14, ist die zur Interpolation am besten anwendbare Formel. Man braucht nur für n irgendeinen Bruch einzusetzen, um den Funktionswert $y = F(x_1 + n\,d)$, resp. $y = F(x_p + n\,d)$, berechnen zu können. Selbstverständlich hat man nicht nötig, stets die Differenzen zu benutzen, die in den schrägen, von oben nach unten laufenden Linien ($\triangle_1^{\mathrm{I}} \ldots \triangle_1^{\mathrm{VII}}$, $\triangle_2^{\mathrm{I}} \ldots \triangle_2^{\mathrm{VI}}$ usw.) stehen. Man kann ebensowohl die Differenzen der von unten nach oben gehenden, schrägen Linien ($\triangle_7^{\mathrm{I}} \ldots \triangle_1^{\mathrm{VII}}$, $\triangle_8^{\mathrm{I}} \ldots \triangle_{17}^{\mathrm{VI}}$ usw.) benutzen; jedoch ist dabei zu berücksichtigen, daß Gleich. 13 und 14 nur für Interpolationen in der Richtung der Differenzbildung gültig sind. Das Schema der Differenzen (S. 32) ist so zustande gegekommen, daß eine Zahl stets von der darunter stehenden subtrahiert wurde; die Differenzbildung geht also von oben nach unten, und der Funktionswert $F(x_p + n\,d)$ ist eine zwischen y_p und y_{p+1} liegende Größe. Selbstverständlich kann man aber ebensowohl die Differenzberechnung in der umgekehrten Rich-

tung ausführen, so daß stets eine untenstehende von der obenstehenden Zahl subtrahiert wird. Die numerischen Werte der Differenzen verändern sich dadurch nicht, und man überzeugt sich leicht, daß nur die Differenzen ungerader Ordnungen entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. In dem so ausgeführten Differenzschema spielen die Werte y_8, $\triangle_7^{I}$, $\triangle_6^{II}$, $\triangle_5^{III}$ usw. ganz die nämliche Rolle wie y_1, $\triangle_1^{I}$, $\triangle_1^{II}$, $\triangle_1^{III}$ usw. in unserem obigen Schema (S. 32), und sie sind daher statt der letzteren in Gleich. 13 oder 14 einzusetzen. Wünscht man also mit den in den aufsteigenden schrägen Linien stehenden Differenzen zu rechnen, so kann man sie in Gleich. 14 einsetzen und braucht nur gleichzeitig die Vorzeichen der Differenzen ungerader Ordnung zu verändern. Man erhält dann die folgende Interpolationsformel:

$$y = F(x_p - n\,d) = y_p - \frac{n}{1}\triangle_{p-1}^{I} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\triangle_{p-2}^{II}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle_{p-3}^{III} + \ldots\ldots \quad \text{(Gleich. 17)}$$

Übrigens ist man nicht darauf beschränkt, mit den Differenzen der schrägen Linien zu interpolieren; man kann ebensogut die in verschiedenen Zickzacklinien stehenden benutzen. Sehr oft wird es am bequemsten, von den Differenzen in der Mitte des Schemas auszugehen, z. B.:

x_4	y_4		$\triangle_3^{II}$		$\triangle_2^{IV}$		$\triangle_1^{VI}$	
		$\triangle_4^{I}$		$\triangle_3^{III}$		$\triangle_2^{V}$		$\triangle_1^{VII}$
x_5	y_5							

Gleich. 14 zufolge hat man:

$$y = F(x_4 + n\,d) = y_4 + \frac{n}{1}\triangle_4^{I} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\triangle_4^{II} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle_4^{III} + \ldots$$

Statt der hier vorkommenden Differenzen $\triangle_4$ kann man die obigen, in der Zickzacklinie stehenden einsetzen. Aus dem vollständigen Schema der Differenzen (S. 32) ersieht man nämlich, daß

$\triangle_4^{II} = \triangle_3^{II} + \triangle_3^{III}$

$\triangle_4^{III} = \triangle_3^{III} + \triangle_3^{IV}$ aber: $\triangle_3^{IV} = \triangle_2^{IV} + \triangle_2^{V}$, folglich:

$$\triangle_4^{III} = \triangle_3^{III} + \triangle_2^{IV} + \triangle_2^{V}$$

$\triangle_4^{IV} = \triangle_3^{IV} + \triangle_3^{V}$ aber: $\triangle_3^{V} = \triangle_2^{V} + \triangle_1^{VI} + \triangle_1^{VII}$, folglich:

$$\triangle_4^{IV} = \triangle_2^{IV} + 2\,\triangle_2^{V} + \triangle_1^{VI} + \triangle_1^{VII}.$$

Geht man auf diese Weise weiter, so erhält man aus $\triangle_4^{V}$

Glieder, die $\triangle_2^{V}$, $\triangle_1^{VI}$, $\triangle_1^{VII}$ und höherere Differenzen, dagegen nicht $\triangle_2^{IV}$ und niedrigere Differenzen enthalten. Setzt man also nur die Ausdrücke für die Differenzen bis $\triangle_4^{IV}$ ein, so werden diese Glieder der Gleichung vollständig. Man findet dann:

$$y = F(x_4 + n\,d) = y_4 + \frac{n}{1}\triangle_4^{I} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\triangle_3^{II} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle_3^{III} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\triangle_2^{IV} + \ldots \ldots \ldots \quad \text{(Gleich. 18)},$$

woraus das Gesetz, nach welchem die Glieder gebildet werden, leicht zu ersehen ist. Wenn man mittels Gleich. 18 interpoliert, erhält man Funktionswerte, die den Argumenten zwischen x_4 und x_5 entsprechen. Wünscht man dagegen die den Argumenten zwischen x_4 und x_3 entsprechenden Funktionswerte, braucht man nur $-n$ statt n in Gleich. 18 zu setzen und hat dann:

$$y = F(x_4 - n\,d) = y_4 - \frac{n}{1}\triangle_4^{I} + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\triangle_3^{II} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle_3^{III} + \frac{(n+2(n+1)\,n\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\triangle_2^{IV} - \ldots \ldots \ldots \quad \text{(Gleich. 19)}.$$

Es lassen sich noch viele andere Formeln entwickeln; eine zu große Mannigfaltigkeit derselben würde aber nur den Überblick erschweren, weshalb wir uns mit den hier gegebenen begnügen; sie genügen tatsächlich auch in allen Fällen. Es fehlen nur noch die Extrapolationsformeln. Wir erhalten dieselben einfach aus den Interpolationsformeln, indem $-n$ statt n gesetzt wird. Für Extrapolation unterhalb x_8 (vgl. Schema S. 32) geht man am besten von Gleich. 17 aus; wird hier $-n$ statt n und $p = 8$ gesetzt, so nimmt die Gleichung die folgende Form an:

$$y = F(x_8 + n\,d) = y_8 + \frac{n}{1}\triangle_7^{I} + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\triangle_6^{II} + \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle_5^{III} + \ldots \quad \text{(Gleich. 20)}.$$

Für die Extrapolation oberhalb x_1 wendet man Gleich. 13 an, indem $-n$ statt n gesetzt wird; die Gleichung geht dann in folgende Form über:

$$y = F(x_1 - n\,d) = y_1 - \frac{n}{1}\triangle_1^{I} + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\triangle_1^{II} - \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle_1^{III} + \ldots \quad \text{(Gleich. 21)}.$$

Die Extrapolation ist immer eine mißliche Sache, wenn nicht besondere Umstände gewährleisten, daß dasselbe Gesetz,

welches innerhalb der Grenzen der gefundenen Funktionswerte gültig ist, auch außerhalb dieser Grenzen zur Geltung kommt. Ist dies aber der Fall, so läßt sich die Extrapolation nur dann mit Genauigkeit ausführen, wenn die betreffende Extrapolationsformel wirklich das Gesetz ausdrückt. Trifft dies nämlich nicht zu, so können die mittels der Formel berechneten von den richtigen Werten erheblich abweichen. Nun stellen unsere Extrapolationsformeln, wie die Interpolationsformeln, algebraische ganze Funktionen dar, und folglich können die Funktionswerte nur dann nach den Formeln genau berechnet werden, wenn die Funktion $y = F(x)$ eine algebraische ist. Wir untersuchen deshalb zuvörderst die Differenzen ganzer Funktionen, um ein Merkmal zu finden, nach welchem sich entscheiden läßt, ob eine vorliegende Reihe Messungen durch eine algebraische Funktion ausgedrückt werden kann.

10. *Die Differenzen ganzer Funktionen.* Es sei $y = F(x)$ eine ganze Funktion; sie kann dann folgendermaßen geschrieben werden: $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots.$, wo n eine ganze Zahl ist. Werden dem x sukzessiv die Werte $x_0, x_0 + d, x_0 + 2d \ldots.$ gegeben, erhält man die entsprechenden Werte y, nämlich y_0, y_1, $y_2 \ldots.$ Es sind dann die Differenzen erster Ordnung $\triangle^1 = F(x+d) - F(x) = n x^{n-1} d + \ldots$; woraus ersichtlich ist, daß der Grad dieser Differenzen um eine Einheit kleiner ist als der Grad der Funktion. Der Grad der Differenzen zweiter Ordnung wird dann wieder um eine Einheit kleiner, usw. Folglich wird $\triangle^n$ den Grad 0 haben und ist also konstant, weil x nicht darin eingeht. Da $\triangle^n =$ konst., wird $\triangle^{n+1} = 0$. In diesem Falle wird also die Anzahl der Differenzen eine endliche, und die Funktion läßt sich mittels eines Funktionswertes, der Differenzen und d genau ausdrücken.

Ob die Beziehung zwischen den Argumenten und den Funktionswerten in einem vorliegenden Falle sich durch eine algebraische Funktion ausdrücken läßt, ist also daraus zu erkennen, daß die Differenzen höherer Ordnung schließlich Null werden, oder wenigstens gegen Null konvergieren, wenn man nicht über so viele Funktionswerte verfügt, daß die konstanten Differenzen berechnet werden können. Die Funktionen, um die es sich bei den psychologischen Untersuchungen handelt, sind nun gewöhnlich nicht algebraisch, und man erhält daher eine unendliche Reihe von Differenzen, oder mit anderen Worten: die Funktionen können nicht mittels einer endlichen Anzahl Glieder der Gleich. 13—21 ausgedrückt

werden. Das Resultat einer Interpolation wird also in diesem Falle nie vollständig genau; die Genauigkeit wird aber um so größer, je mehr Differenzen berücksichtigt werden. Die Bestimmung z. B. des Maximumwertes einer Funktion wird hierdurch zuweilen recht umständlich. Die Berechnungen sind zwar sehr einfach, wenn aber mit einer großen Anzahl Differenzen viele Interpolationen ausgeführt werden müssen, um den Maximumpunkt mit einiger Genauigkeit zu bestimmen, kann die Arbeit dennoch viel Zeit beanspruchen und wird oft endlos; aus dieser Schwierigkeit heraus führt uns aber die folgende Betrachtung. Die Funktion $y = F(x)$ kann immer graphisch als eine Kurve dargestellt werden. Ein hinreichend kleines Stück irgendeiner Kurve kann aber stets als eine Kurve ersten, zweiten oder dritten Grades betrachtet werden. Hat man also durch genaue Interpolation einige einander naheliegende Funktionswerte bestimmt, so wird es sich zeigen, daß die Differenzen dieser Funktionswerte bald konstant werden. Sind $\triangle^{I} =$ konst., so werden folglich $\triangle^{II} = 0$, und Gleich. 18 reduziert sich dann auf die folgende Gestalt: $y = y_4 + n\,\triangle_4^{I}$. Sucht man z. B. das Argument, das einem gegebenen Funktionswert $y = a$ entspricht, so hat man:

$$n = \frac{a - y_4}{\triangle_4^{I}}, \text{ woraus: } n\,d = \frac{d}{\triangle_4^{I}}(a - y_4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gleich. 22).}$$

Gleich. 22 ist die bekannte lineäre Interpolationsformel, die u. a. bei der Interpolation der Logarithmen Anwendung findet. Auch in dem Falle, wo erst $\triangle^{II} =$ konst. und folglich $\triangle^{III} = 0$ werden, ist eine einfache Berechnung des Argumentes möglich. Gleich. 18 nimmt dann die Form an:

$$y = y_4 + \frac{n}{1}\triangle_4^{I} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\triangle_3^{II}.$$

Wird hier wieder $y = a$, so kann n aus der quadratischen Gleichung:

$$n^2 + n\left(\frac{2\,\triangle_4^{I}}{\triangle_3^{II}} - 1\right) - \frac{2}{\triangle_3^{II}}(a - y_4) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(Gleich. 23)}$$

bestimmt werden. Handelt es sich endlich um die Bestimmung der Lage eines Maximum- oder Minimumpunktes, so braucht man nur eine Kurve dritten Grades durch die interpolierten Funktionswerte legen zu können. In diesem Fall ist also $\triangle^{IV} = 0$, und man hat:

$$y = y_4 + \frac{n}{1}\triangle_4^{I} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\triangle_3^{II} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\triangle_3^{III}.$$

Die Lage des Maximumpunktes ist dann bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{d\,y}{d\,n} = \triangle_4^{I} + \frac{\triangle_3^{II}}{2}(2n-1) + \frac{\triangle_3^{III}}{6}(3n^2-1) = 0 \quad . \quad \text{(Gleich. 24).}$$

Die Abszisse kann also hier ebenfalls mittels einer quadratischen Gleichung berechnet werden. Es bedarf keines näheren Nachweises, daß man sich die Berechnungen mittels Gleich. 22—24 bedeutend abkürzen kann.

Beispiele. Dafs die Differenzen einer transzendenten Funktion ungefähr konstant werden können, wenn man nur die Differenzen der Argumente hinreichend klein nimmt, ist aus der Logarithmentafel zu ersehen. In den untenstehenden Auszügen dieser Tafel sind die Werte x, $y = \log x$ und die Differenzen teils für $x = 1000$, 1100, 1200 usw., teils für $x = 1000$, 1001, 1002 usw. aufgeführt.

x	y	$\triangle^{I}$	$\triangle^{II}$	$\triangle^{III}$
1000	0000			
		414		
1100	0414		—36	
		378		5
1200	0792		—31	
		347		6
1300	1139		—25	
		322		3
1400	1461		—22	
		300		
1500	1761			

x	y	$\triangle^{I}$
1000	0000	
		4
1001	0004	
		4
1002	0008	
		4
1003	0012	
		5
1004	0017	
		4
1005	0021	

Während für die ersteren Funktionswerte nicht einmal die Differenzen vierter Ordnung konstant werden, erweisen sich dagegen schon die Differenzen erster Ordnung als konstant, wenn die Differenz der Argumente genügend klein geworden ist. In diesem Teile der Tafel kann daher linear, mittels Gleich. 22, interpoliert werden. Dies heifst mit anderen Worten nur, dafs wir eine numerische Gleichung von der Form $y = \log x$ mit Bezug auf x genau lösen können. Dasselbe Verfahren läfst sich selbstverständlich auf jede andere Gleichung $y = F(x)$ anwenden, wenn nur die Funktion F solcher Art ist, dafs die den gegebenen Werten x entsprechenden Werte y sich berechnen lassen.

Auf diese Weise läfst sich die Gleichung: $r = r_2 + u r^v$ (Gleich. 4 a) mit Bezug auf r lösen, wenn u und v bekannt sind. Man berechnet dann eine Tabelle über die Werte $r_2 = r - u \cdot r^v$, indem man dem Argumente r äquidistante Werte beilegt und die konstante Differenz d dieser Werte so klein nimmt, dafs die Differenzen erster Ordnung des r_2 als konstant angesehen werden dürfen. Eine solche Tafel ist beispielsweise in Tab. 5 wiedergegeben[1]). Der Wert r, der einer

[1]) Vgl. Lehmann, Beiträge zur Psychodynamik der Gewichtempfindungen, Archiv f. Psychologie, Bd. 6, S. 444.

gegebenen Gröfse $r_2 = a$ entspricht, kann hieraus durch Interpolation nach Gleich. 22 gefunden werden. Ist z. B. $a = 700$, so hat man $nd = \frac{250}{234}(700-475) = 240$. Also ist der gesuchte Wert $r = 500 + 240 = 740$.

Tabelle 5.

r	d	r_2	Δ^I
250		239	
	250		236
500		475	
	250		234
750		709	
	250		233
1000		942	

Liegt der häufig eintretende Fall vor, daß die Differenzen höherer Ordnungen divergieren, stets größer werden, so können die Messungen also nicht durch eine algebraische Funktion ausgedrückt werden. Es läßt sich aber dennoch recht wohl interpolieren, wenn man nur von einem Funktionswerte ausgeht, der dem betreffenden Intervall möglichst nahe liegt, und eine hinlängliche Anzahl Differenzen berücksichtigt. Soll z. B. zwischen y_4 oder y_5 interpoliert werden, so geht man entweder von y_4 oder y_5 aus und interpoliert mittels der in der Zickzacklinie stehenden Differenzen (Gleich. 18 bzw. 19). Um das Verfahren zu zeigen, führe ich hier die Berechnungen eben für einen Fall vollständig durch, wo die Differenzen höherer Ordnungen divergieren, und wo folglich die Bestimmung eines Maximumpunktes recht umständlich werden kann.

Beispiel[1]). Als Resultat einer Messung ist gefunden, dafs den Argumenten:

$$x = 1200 \quad 1250 \quad 1300 \quad 1350 \quad 1400 \quad 1450 \quad 1500 \quad 1550$$

die Funktionswerte:

$$y = 2 \quad 16 \quad 40 \quad 42 \quad 43 \quad 26 \quad 11 \quad 0$$

entsprechen, und es fragt sich jetzt: Für welchen Wert des x wird y Maximum? Wird die Funktion graphisch dargestellt, indem man x als Abszisse, y als Ordinate absetzt, so sieht man (vgl. Fig. 4), dafs das Maximum wahrscheinlich zwischen $x = 1350$ und $x = 1400$ fällt. Um die Grenzen einzuengen, wird man dann damit anfangen, $y = F(1375)$ zu bestimmen. Es werden also die Differenzen wie im untenstehenden Schema berechnet und die Interpolation nach Gleich. 18 ausgeführt, indem $n = 0{,}5$ gesetzt wird. Man erhält dann die sukzessiven Koeffizienten:

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \frac{3}{128},\ \frac{3}{256},\ -\frac{5}{1024},\ -\frac{5}{2048}\ \ldots$$

[1]) Beiträge zur Psychodynamik, S. 482—486.

Diese Koeffizienten kommen immer vor, wenn man die Mitte mittels Gleich. 18 interpoliert, d. h. wenn man in dieser Interpolationsformel $n = 0{,}5$ setzt. Dem Schema:

x	y	$\triangle^{I}$	$\triangle^{II}$	$\triangle^{III}$	$\triangle^{IV}$	$\triangle^{V}$	$\triangle^{VI}$	$\triangle^{VII}$
1200	2							
		14						
1250	16		10					
		24		—32				
1300	40		—22		53			
		2		21		—91		
1350	*42*		*--1*		*—38*		*166*	
		1		*—17*		*75*		*—296*
1400	43		—18		37		—130	
		—17		20		—55		
1450	26		2		—18			
		—15		2				
1500	11		4					
		—11						
1550	0							

entnimmt man dann, Gleich. 18 gemäfs, die hervorgehobenen Differenzen. Es ist also:

$$y_{1375} = 42 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{17}{16} - \frac{114}{128} + \frac{225}{256} - \frac{830}{1024} + \frac{1480}{2048} = 43{,}59.$$

Aus dem gefundenen Werte y_{1375} ersieht man, dafs das gesuchte Maximum zwischen $x = 1375$ und $x = 1400$ liegt. Um die nähere Bestimmung desselben möglichst genau und bequem auszuführen, können wir Gleich. 24 in Anwendung bringen, zu welchem Zwecke es notwendig wird, die Funktionswerte zu bestimmen, welche $x = 1380$, 1385, 1390 und 1395 entsprechen. Da es uns aber nicht auf die absoluten, sondern nur auf die relativen Werte des y ankommt, brauchen wir bei dieser Berechnung nicht sämtliche Differenzen mitzunehmen; beschränkt man sich aber auf die Differenzen bis sechster Ordnung inkl., mufs selbstverständlich auch y_{1375} mit derselben Anzahl Differenzen berechnet werden. In dem vorliegenden Falle erhalten wir mittels der Differenzen bis sechster Ordnung das folgende Resultat:

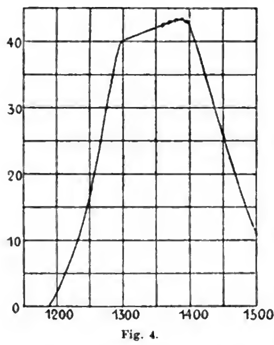


Fig. 4.

$$x = 1375 \quad 1380 \quad 1385 \quad 1390 \quad 1395$$
$$y = 42{,}87 \quad 43{,}06 \quad 43{,}21 \quad 43{,}27 \quad 43{,}17.$$

Bilden wir hier auf gewöhnliche Weise die Differenzen, so zeigt es sich, dafs $\triangle^{III}$ als konstant angesehen werden darf. Man findet:

x	y	$\triangle^{I}$	$\triangle^{II}$	$\triangle^{III}$
1375	42,87			
		0,19		
1380	43,06		—0,04	
		0,15		—0,05
1385	43,21		—0,09	
		0,06		—0,07
1390	43,27		—0,16	
		—0,10		
1395	43,17			

Setzen wir also in Gleich. 24 $\triangle^{I} = 0{,}06$, $\triangle^{II} = -0{,}09$ und $\triangle^{III} = -0{,}07$, so erhält man $n = 0{,}722$. Da hier aber $d = 5$, wird $n \cdot d = 3{,}6$ und folglich der gesuchte Wert der Abszisse des Maximumpunktes $1385 + 3{,}6 = 1389$.

Während die Interpolation, bei gehöriger Vorsicht, auch in dem Falle brauchbare Werte gibt, wo die Differenzen nicht gegen Null konvergieren, führt die Extrapolation unter diesen Umständen meistens zu sinnlosen Resultaten. Man muß daher, wenn die Operation unvermeidlich ist, eine Formel finden, die von den gegebenen Funktionswerten vollständig befriedigt wird. Sehr oft gelingt es, wenn $y = F(x)$ nicht algebraisch ist, log. y durch eine algebraische Funktion auszudrücken. Zeigt es sich, daß die Differenzen der Werte log. y gegen Null konvergieren, so kann man mittels dieser Differenzen extrapolieren; sicherer wird es jedenfalls, erst die wahrscheinlichen Konstanten (vgl. Kap. 16) zu berechnen und dann die Extrapolation auszuführen. Wir gehen hier nicht näher auf diese komplizierteren Fälle ein, die wohl selten oder nie bei psychologischen Untersuchungen vorliegen werden. Es soll hier nur an einem Beispiele nachgewiesen werden, welche Sinnlosigkeiten die Extrapolation ergeben kann, wenn sie unter Umständen ausgeführt wird, wo die Formeln nicht stichhalten.

Mit Bezug auf die eben besprochenen Messungen suchen wir den Wert $x < 1200$, für welchen $y = 0$. Die Berechnung ist mittels Gleich. 21 auszuführen. Da die Fig. 4 es wahrscheinlich macht, dafs der gesuchte Wert zwischen $x = 1200$ und $x = 1175$ liegt, fangen wir damit an, y_{1175} zu berechnen, zu welchem Zwecke in Gleich. 21 $n = 0{,}5$ gesetzt wird. Es zeigt sich nun sofort, dafs die Formel nicht von den Messungen befriedigt wird, denn während man sonst um so genauere Resultate erhält, je mehr Differenzen berücksichtigt werden, so tritt hier das Entgegengesetzte ein. Beschränkt man sich auf die Differenzen bis zweiter Ordnung, findet man

$$y_{1175} = 2 - \frac{1}{2} \cdot 14 + \frac{3}{8} \cdot 10 = -1{,}75;$$

der gesuchte Wert liegt also zwischen 1175 und 1200. Wird aber $\triangle^{III}$ herangezogen, findet man

$$y_{1175} = 2 - \frac{1}{2} \cdot 14 + \frac{3}{8} \cdot 10 + \frac{5}{16} \cdot 32 = 8{,}25;$$

wird auch $\triangle^{IV}$ mitgenommen, resultiert:

$$y_{1175} = 2 - \frac{1}{2} \cdot 14 + \frac{3}{8} \cdot 10 + \frac{5}{16} \cdot 32 + \frac{35}{128} \cdot 53 = 22{,}75.$$

Das Resultat wird also tatsächlich um so sinnloser, je mehr Differenzen berücksichtigt werden, was sich übrigens voraussehen liefs, indem die Differenzen nicht gegen Null konvergieren.

Würde man hier, um eine genaue Extrapolation zu ermöglichen, den oben angedeuteten Weg einschlagen, die Differenzen des log. y zu bilden und mittels derselben zu extrapolieren, so wäre, dem Anschein nach, gar kein Resultat zu erhalten. Die Differenzen des log. y konvergieren nämlich gegen Null, und folglich läfst sich log. y als eine algebraische Funktion ausdrücken. Nun kann man aber $y = 0$ nur dann haben, wenn log. $y = -\infty$, was nicht mittels einer endlichen Anzahl Werte erreicht wird. Dies Resultat ist nun eigentlich richtig, denn die vorliegende Kurve ist eine Fehlerkurve, die asymptotisch zur Abszissenachse verläuft, d. h. die Wahrscheinlichkeit eines beliebig grofsen Fehlers wird nie Null. In praxi überschreiten die Fehler aber kaum eine gewisse Gröfse, und die Frage, wann $y = 0$ wird, ist daher keine sinnlose. Mit genügender Genauigkeit wird sie beantwortet, wenn man nur die auf dem aufsteigenden Aste der Kurve liegenden Punkte berücksichtigt, also nur mittelss $\triangle^{I}$ und $\triangle^{II}$ extrapoliert. Man findet dann $x = 1187$.

11. *Die Fehler der Funktionswerte.* Das Resultat einer endlichen Anzahl Messungen kann, wie schon oben hervorgehoben, nicht den wahren, sondern nur den wahrscheinlichen Wert der gemessenen Größe ergeben. Wenn also eine Reihe Werte $y = F(x)$ gemessen ist, muß darauf gerechnet werden, daß jeder dieser Werte mit einem Fehler behaftet ist; statt $y_1, y_2, y_3 \ldots.$ sind gefunden worden $y_1 + f_1, y_2 + f_2, y_3 + f_3 \ldots.$, wo die Fehler $f_1, f_2, f_3 \ldots.$ sowohl negativ als positiv sein können. Werden die Differenzen der gemessenen Funktionswerte berechnet, sind folglich auch diese Größen mit Fehlern behaftet. Gleich. 11 zufolge wird die Differenz n^{ter} Ordnung mit dem Fehler φ_1^n behaftet:

$$\triangle_1^n + \varphi_1^n = y_{n+1} + f_{n+1} - \frac{n}{1}(y_n + f_n) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(y_{n-1} + f_{n-1}) - \ldots.$$

Subtrahiert man hiervon die fehlerfreie Differenz:

$$\triangle_1^n = y_{n+1} - \frac{n}{1} y_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_{n-1} - \ldots.,$$

so erhält man den Fehler:

$$\varphi_1^n = f_{n+1} - \frac{n}{1} f_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f_{n-1} - \ldots.$$

Es ist hieraus ersichtlich, daß der Fehler, mit welchem jede Differenz behaftet ist, auf dieselbe Weise aus den Fehlern der Funktion gebildet werden kann wie die Differenz aus den fehlerfreien Funktionswerten. Wenn man also den Einfluß der Fehler untersuchen will, setzt man einfach $y = 0$ und bildet nur die Differenzen der Fehler. Die Tab. 6 zeigt die Fehler der Differenzen, wenn ein Funktionswert den Fehler 1 hat. Wie man sieht, verbreitet sich der Einfluß des Fehlers, und seine Größe wird in der Differenz n^{ter} Ordnung gleich den

Tabelle 6.

x	φ	Δ^{I}	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}	Δ^{V}	Δ^{VI}
		0		0		0	
1	0		0		0		1
		0		0		1	
2	0		0		1		− 6
		0		1		—5	
3	0		1		—4		15
		1		—3		10	
4	1		—2		6		—20
		—1		3		—10	
5	0		1		—4		15
		0		—1		5	
6	0		0		1		—6
		0		0		—1	
7	0		0		0		1
		0		0		0	

Koeffizienten des Binomialausdruckes. Das Maximum der Fehler der Differenzen liegt in derselben Reihe wie der Fehler des Funktionswertes (vgl. Tab. 6), so daß man sofort den mit dem Fehler behafteten Funktionswert nachweisen kann. Hierauf beruht die „Differenzprüfung", welcher eine berechnete Tabelle immer unterzogen werden sollte. Die Differenzen der exakt berechneten Funktionswerte konvergieren nämlich gegen Null; kommt dagegen irgendwo ein Fehler vor, so wachsen die Differenzen, und der fehlerhafte Wert läßt sich nach der angegebenen Regel ausfindig machen.

Wenn die Funktionswerte y_1, y_2, y_3 .... aus wiederholten Messungen richtig abgeleitet sind, so können die Fehler derselben, f_1, f_2, f_3 ...., als unausgeglichene zufällige Fehler angesehen werden, die teils positiv, teils negativ sind. In diesem Falle können die Fehler so gegeneinander ausgeglichen werden, daß die wahrscheinliche Größe jedes einzelnen Funktionswertes sich bestimmen läßt. Das Verfahren dieser Ausgleichung

wird aber ein verschiedenes, je nachdem die auszugleichenden Fehler derselben oder verschiedener Ordnung sind. Die Bedeutung dieses Unterschiedes wird am besten durch ein paar Beispiele erläutert.

Nehmen wir an, daß verschiedene Längen, die kleiner als 1^m sind, mit demselben, in Millimeter geteilten Metermaßstabe gemessen werden, und daß stets dieselbe Genauigkeit angewandt wird. Da mit dem bloßen Auge eine Größe kleiner als 0,5 mm kaum mit Sicherheit geschätzt werden kann, müssen wir davon ausgehen, daß jede Messung ohne Rücksicht auf die Größe der gemessenen Länge mit einem Fehler von $\pm$ 0,5 mm behaftet sei. Ob die gemessene Länge 2 mm oder 992 mm ist, macht in dieser Beziehung keinen Unterschied; die Fehler sind von den gemessenen Längen unabhängig, sie sind sämtlich derselben Ordnung. Ganz anders verhält es sich dagegen bei der Vergleichung von Reizintensitäten, z. B. bei photometrischen Bestimmungen. Da der ebenmerkliche Unterschied durchschnittlich auf $^1/_{100}$ der verglichenen Reizgrößen angesetzt werden kann, wird der bei einer photometrischen Bestimmung gemachte Fehler den jeweilig in Betracht kommenden Reizgrößen proportional. Bei einer Reizgröße 10 wird der Fehler $\pm 10^{-1}$, bei einer Reizgröße 10^6 wird der Fehler dagegen $\pm 10^4$, d. h. die Fehler sind ganz verschiedener Ordnung. Hierauf ist selbstverständlich bei der Fehlerausgleichung Rücksicht zu nehmen, weil sonst die kleinen Größen nach der Ausgleichung mit Fehlern behaftet sein können, die weit größer als die Werte selbst und folglich durchaus sinnlos sind. Die Methode der Fehlerausgleichung muß also eine ganz verschiedene sein, je nachdem die Fehler derselben Ordnung oder den gemessenen Größen proportional sind.

12. *Ausgleichung von Fehlern derselben Ordnung.* Das Prinzip der Fehlerausgleichung läßt sich am besten durch eine graphische Darstellung veranschaulichen. Die Funktion $y = F(x)$ läßt sich immer als eine Kurve abbilden, indem die Argumente x als Abszissen, die entsprechenden Werte y als Ordinaten abgesetzt werden; eine Kurve durch die Endpunkte der Ordinaten stellt dann die Funktion dar. Es sei diese Kurve ag (Fig. 5). Da die gemessenen Funktionswerte $y_1, y_2, y_3 \ldots$ mit Fehlern behaftet sind, liegen die Endpunkte der Ordinaten, $a, b, c \ldots$, nicht in der Kurve, sondern weil die Fehler teils positiv, teils negativ sind, bald oberhalb, bald unterhalb

derselben. Die sukzessiven Endpunkte werden durch Gerade, *ab*, *bc*, *cd* . . ., verbunden und diese Geraden halbiert, was z. B. auf die Weise ausgeführt werden kann, daß in der Mitte zwischen x_1 und x_2, x_2 und x_3 usw. Senkrechte errichtet werden; wo diese die Linien *ab*, *bc* . . . schneiden, liegen die betreffenden Mittepunkte *n*, *p*, *q* . . . Werden diese Punkte wiederum durch Gerade, *np*, *pq* . . ., verbunden, so schneiden diese Geraden die Ordinaten y_2, y_3 . . . in Punkten, die der Kurve näher liegen als die Punkte *b*, *c* . . .; die positiven und negativen Fehler haben sich teilweise ausgeglichen, so daß die auf diese Weise bestimmten Ordinaten genauer sind als die ursprünglichen. Wird das Verfahren nochmals wiederholt, kann man der Kurve noch näher kommen, usw. Die Methode ist aber, wie aus der Figur ersichtlich, nur dann anwendbar,

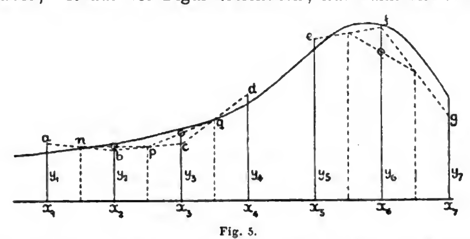


Fig. 5.

wenn die Argumente einander so nahe liegen, daß die betreffende Strecke der Kurve als eine Gerade betrachtet werden darf. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wie z. B. bei den Punkten *e*, *f*, *g*, so führt die Ausgleichung zum entgegengesetzten Resultat. Werden die Mittepunkte der Linien *ef* und *fg* verbunden, schneidet diese Gerade die Ordinate y_6 in einem Punkte, welcher von der Kurve weiter entfernt liegt als *f*. In diesem Falle muß man also einen anderen Weg gehen; dieser wird aber am leichtesten verständich, wenn wir vorerst die praktische Ausführung des besprochenen Interpolationsverfahrens erörtern.

Die Ordinate y_n, deren Endpunkt *n* (Fig. 5) ist, hat die Länge $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$. Diese Größe erhält man aber eben, wenn man die Mitte interpoliert und dabei nur die Differenzen erster Ordnung berücksichtigt. Gleich. 13 zufolge hat man dann nämlich:

$$y_n = F(x+\tfrac{1}{2}d) = y_1 + \tfrac{1}{2}\triangle_1^{I}; \text{ da aber: } \triangle_1^{I} = y_2 - y_1, \text{ wird:}$$

$$y_n = \tfrac{1}{2}(y_1+y_2).$$

Das Verfahren, das wir oben graphisch dargestellt haben, kann also arithmetisch so ausgedrückt werden, daß erst die Mittelwerte y_u der gegebenen Funktionswerte und aus diesen Größen wieder die Mittelwerte berechnet werden. Die so erhaltenen neuen Funktionswerte bezeichnen wir im folgenden als (y). In praxi führt man die Berechnungen am bequemsten sukzessiv aus, wie es hier angegeben ist; man kann aber auch (y) direkt, mittels einer Formel, berechnen. Es seien y_1, y_2 und y_3 drei gegebene Funktionswerte; man hat dann:

$$y_u = \tfrac{1}{2}\cdot(y_1+y_2) \text{ und } y'_u = \tfrac{1}{2}(y_2+y_3); \text{ folglich wird:}$$

$$(y_2) = \tfrac{1}{2}(y_u+y'_u) = \tfrac{1}{4}(y_1+2y_2+y_3) \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gleich. 25).}$$

Wiederholt man die Operation nochmals, erhält man erst die Werte (y_u) und aus diesen die zweimal ausgeglichenen Funktionswerte $((y))$. Inwiefern nun diese ausgeglichenen Funktionswerte (y) oder $((y))$ der Kurve näher oder ferner liegen als die gemessenen, hängt, wie wir gesehen haben, von der Gestalt der Kurve ab; wenn die zwischen den Argumenten liegenden Strecken der Kurve nicht als Gerade betrachtet werden können, wirkt die Ausgleichung nachteilig; sie ist zu stark. Je mehr Differenzen man aber bei der Ausgleichung berücksichtigt, um so schwächer wird die Ausgleichung; würde man sämtliche zur Verfügung stehende Differenzen — also bis $\triangle^{n-1}$, wenn n Funktionswerte gegeben sind — berücksichtigen, fände gar keine Ausgleichung statt. Da es nun fast immer möglich ist, eine Kurve zweiten Grades mit einer kleinen Strecke der Kurve zur Deckung zu bringen, so braucht man also bei der Interpolation nur die Differenzen zweiter Ordnung mitzunehmen, um eine Ausgleichung zu erreichen, durch welche man sich den fehlerfreien Funktionswerten überall nähert. Die Methode schlägt wohl nur dann fehl, wenn die Kurve Spitzen hat, mit welchen Kegelschnitte nicht zur Deckung gebracht werden können. Dies gilt zwar auch von den Wendepunkten; durch ein genügend kleines Stück der Kurve läßt sich hier jedoch immer eine Gerade legen, so daß keine großen Abweichungen entstehen können. Wie stark die Ausgleichung in jedem gegebenen Falle wird, läßt sich wohl nicht berechnen; man kann sich aber stets durch eine graphische Darstellung von der Wirkung der Ausgleichung überzeugen. Durch Wiederholung der Operation kann man schließlich alle partiellen Maxima zum Verschwinden bringen; ob dies aber in einem vorliegenden Falle richtig ist oder nicht, hängt ganz von der

Natur der Erscheinung und von dem zu erreichenden Zwecke ab. Die allgemeinen Gesichtspunkte, die hier zur Geltung kommen können, sollen später (Kap. 26) besprochen werden.

Die Methode ist also einfach folgende: Nehmen wir an, daß wir q Funktionswerte, $y_1, y_2 \ldots y_q$, den äquidistanten Argumenten $x_1, x_2 \ldots x_q$ entsprechend, haben. Es werden $\triangle^I$ und $\triangle^{II}$ berechnet, dem Schema (S. 32) gemäß, darauf sämtliche Werte $y_u = F\cdot(x_p + 0{,}5\cdot d)$. Diese Berechnungen werden nach Gleich. 13 ausgeführt, die für diesen Fall die Form:

$$y_u = F(x_p + 0{,}5\,d) = y_p + \tfrac{1}{2}\triangle^I_p - \tfrac{1}{8}\triangle^{II}_p \quad . \; . \; . \quad \text{(Gleich. 26a)}$$

annimmt. Gleich. 26a genügt aber nicht für den letzten Wert y_u; hier kann z. B. Gleich. 18 angewandt werden, und zwar in folgender Form:

$$y_u = F\cdot(x_{q-1} + 0{,}5\cdot d) = y_{q-1} + \tfrac{1}{2}\triangle^I_{q-1} - \tfrac{1}{8}\triangle^{II}_{q-2} \quad . \quad \text{(Gleich. 26b)}.$$

Aus den gefundenen Werten y_u werden wieder die Differenzen $\triangle^I$ und $\triangle^{II}$ gebildet und nochmals die Mitte interpoliert. Daraus ergeben sich die korrigierten Werte (y). Diese Interpolation kann zwar wieder mittels Gleich. 26a ausgeführt werden; viel besser ist es aber, jetzt so weit möglich Gleich. 26b anzuwenden, weil sich dann die ausgeglichenen Werte den gegebenen enger anschließen. Wenn man nämlich in beiden Fällen mittels Gleich 26a interpolierte, so würde z. B. (y_2) durch die folgende, ganz asymmetrische Formel bestimmt werden:

$$(y_2) = \tfrac{1}{64}\,(9\,y_2 + 36\,y_3 + 30\,y_4 - 12\,y_5 + y_6).$$

Wendet man dagegen bei der Bestimmung der Werte y_u die Gleich. 26a und bei der folgenden Bestimmung der Werte (y) die Gleich. 26b an, so erhält man den symmetrischen Ausdruck:

$$(y_2) = \tfrac{1}{64}\,(-3\,y_1 + 12\,y_2 + 44\,y_3 + 12\,y_4 - 3\,y_5),$$

wodurch eine Verschiebung der event. vorkommenden Maximumspunkte vermieden wird.

Ist die Ausgleichung nicht genügend stark, muß das Verfahren auf genau dieselbe Weise wiederholt werden; es ist aber dann gewöhnlich notwendig, an den beiden Enden der Reihe zu extrapolieren. Hierzu dient am oberen Ende Gleich. 21:

$$y_u = F(x_1 - 0{,}5\cdot d) = y_1 - \tfrac{1}{2}\triangle^I_1 + \tfrac{3}{8}\triangle^{II}_1 \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(Gleich. 26c)}$$

und am unteren Ende Gleich. 20:

$$y_u = F(x_q + 0{,}5\cdot d) = y_q + \tfrac{1}{2}\triangle^I_{q-1} + \tfrac{3}{8}\triangle^{II}_{q-2} \quad . \; . \quad \text{(Gleich. 26d)}.$$

Es zeigt sich oft, wie die resultierenden Werte $((y))$ so wenig von (y) differieren, daß eine Fortsetzung der Ausgleichung ganz überflüssig wird; es kann aber auch vorkommen,

daß eine nochmalige Wiederholung notwendig ist, um eine glatte Kurve hervorzubringen. Es läßt sich hier keine allgemeine Regel geben; die Stärke der nötigen Ausgleichung wird hauptsächlich von dem jeweilig zu erreichenden Zwecke abhängen.

Das Verfahren und die praktische Anordnung werden durch das Beispiel Tab. 7 erleuchtet. Die Werte x und y sind die in Tab. 4 berechneten; der Einfachheit wegen sind hier aber nur die Dezimalstellen aufgeführt. Für die beiden ersteren Ausgleichungen sind die Differenzen angegeben, für die beiden letzteren nur die Resultate. Wie ersichtlich, verändern sich die Werte y fast gar nicht; durch die früheren Berechnungen (vgl. Tab. 4) haben sich die Fehler also fast vollständig ausgeglichen. Die Werte $((y))$ geben eine ganz glatte Kurve.

Tabelle 7.

x	y	Δ^{I}	Δ^{II}	y_u	Δ^{I}	Δ^{II}	(y)	(y_u)	$((y))$
								816	
20	760						774		0,774
		—062		732				732	
30	698		—026		—081		691		0,689
		—088		651		005		649	
40	610		021		—076		611		0,610
		—067		575		017		575	
50	543		013		—059		544		0,545
		—054		516		008		517	
60	489		004		—051		491		0,489
		—050		465		—006		463	
70	439		—006		—057		436		0,439
		—056		408		011		409	
80	383		018		—046		384		0,384
		—038		362				362	
90	345						343		0,341

Es erübrigt nur noch eine Bemerkung in betreff der Gleich. 25. Diese Interpolationsformel kann mit Vorteil angewandt werden, wenn es sich darum handelt, die Hauptrichtung einer Reihe stark schwankender Messungen zu bestimmen.

Es wurde z. B. an neun aufeinanderfolgenden Tagen die Muskelkraft mittels eines Dynamometers bestimmt. Die schwankenden Werte, in Kilo ausgedrückt, sind in der Reihe K angeführt. Damit die Richtung der Veränderungen deutlicher hervortrete, sind nach Gleich. 25 erst die Werte K_u und daraus die Werte (K) berechnet. Man erhält dann die folgenden Reihen:

Tag	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
K	35,6	35,0	37,0	34,4	33,4	35,8	31,6	33,6	33,8
K_u		35,3	36,0	35,7	33,9	34,6	33,7	32,6	33,7
(K)		35,7	35,9	34,8	34,2	34,2	33,2	33,2	

Die letzte Reihe zeigt eine entschiedene Abnahme der Muskelkraft [1]).

13. *Ausgleichung der proportionalen Fehler.* Gegeben seien drei mit Fehlern behaftete Funktionswerte, z_1, z_2, z_3, den äquidistanten Argumenten x_1, x_2, x_3 entsprechend. Wir bilden die Differenzen $\triangle^{\rm I}$ und $\triangle^{\rm II}$ und erhalten also das folgende Schema:

$$\begin{array}{ccccc} & & \triangle^{\rm I} & & \triangle^{\rm II} \\ x_1 & z_1 & & & \\ & & z_2 - z_1 & & \\ x_2 & z_2 & & & z_3 - 2z_2 + z_1 \\ & & z_3 - z_2 & & \\ x_3 & z_3 & & & \end{array}$$

Interpolieren wir nach Gleich. 26a die Mitte zwischen x_1 und x_2, haben wir $z_u = \frac{1}{8}(3z_1 + 6z_2 - z_3)$. Sind die fehlerfreien Funktionswerte y_1, y_2, y_3, die Fehler $+f_1$, $-f_2$, $+f_3$, so können wir also schreiben $z_u = y_u + f_u$ und erhalten die Werte dieser beiden Größen (vgl. oben S. 46—47):

$$y_u = \tfrac{1}{8}(3y_1 + 6y_2 - y_3) \text{ und } f_u = \tfrac{1}{8}(3f_1 - 6f_2 - f_3).$$

Nehmen wir nun ferner an, daß die Fehler den gemessenen Größen, also den fehlerfreien Funktionswerten, proportional sind. Es sind dann: $f_1 = q y_1$, $f_2 = q y_2$, $f_3 = q y_3$, und werden diese Größen in den Ausdruck f_u eingesetzt, so resultiert: $f_u = \frac{q}{8}(3y_1 - 6y_2 - y_3)$. Der Fehler f_u ist also nicht dem fehlerfreien Funktionswert y_u proportional, und man weiß überhaupt nichts anderes von seiner Größe, als daß sie von der absoluten Größe der gemessenen Funktionswerte abhängig ist. Wird das Interpolationsverfahren fortgesetzt, kann es also sehr leicht eintreffen, daß kleine Werte y durch die Ausgleichung mit sehr beträchtlichen Fehlern behaftet werden. Es leuchtet daher ein, daß die Ausgleichung in dem vorliegenden Falle nur unter der Voraussetzung anwendbar wird, daß es gelingt, die Fehler den interpolierten Größen proportional und stets abnehmend zu machen. Beides wird erreicht, wenn man nicht die gemessenen Größen, sondern deren Logarithmen ausgleicht. Der Beweis ist sehr leicht zu führen.

---

[1]) Fernere Beispiele der Anwendung dieser Methode kommen in Kap. 26 vor.

Unserer Voraussetzung zufolge sind die gemessenen, fehlerhaften Funktionswerte $y_1(1+q)$, $y_2(1-q)$ und $y_3(1+q)$. Setzen wir in dem obigen Schema $z_1 = log\, y_1(1+q)$, $z_2 = log\, y_2(1-q)$ und $z_3 = log\, y_3(1+q)$, so wird folglich:

$$z_\mu = log\,(y_\mu + f_\mu) = \tfrac{1}{8}\left[3\, log\, y_1(1+q) + 6\, log\, y_2(1-q) - log\, y_3(1+q)\right]$$
$$= log \sqrt[8]{y_1^3\, y_2^6\, y_3^{-1}(1+q^2)(1-q)^6}.$$

Hieraus folgt:

$$y_\mu + f_\mu = \sqrt[8]{y_1^3\, y_2^6\, y_3^{-1}(1+q)^2(1-q)^6}.$$ Da ferner $y_\mu = \sqrt[8]{y_1^3\, y_2^6\, y_3^{-1}}$

so wird: $f_\mu = \sqrt[8]{y_1^3\, y_2^6\, y_3^{-1}}\left[\sqrt[8]{(1+q)^2(1-q)^6} - 1\right] = q' y_\mu$, indem:

$$q' = \sqrt[8]{(1+q)^2(1-q)^6} - 1.$$

Seiner Bedeutung zufolge ist q ein konstanter, positiver Bruch; die Größe q' ist also eine Konstante, oder mit anderen Worten: f_μ ist dem Funktionswerte y_μ proportional. Man sieht ferner, daß:

$$q' = \sqrt[8]{1+q)^2(1-q)^6} - 1 < q, \text{ weil: } \sqrt[8]{(1+q)^2(1-q)^6} < 1+q$$
$$\text{oder: } (1-q)^6 < (1+q)^6;\ q > 0.$$

Wenn wir die Logarithmen der gemessenen Größen ausgleichen, erreichen wir also, daß $f_\mu = q' y_\mu$, wo $q' < q$, oder mit anderen Worten: die Fehler der interpolierten Größen sind diesen Größen proportional und nehmen durch die Ausgleichung ab.

Im vorhergehenden sind wir, um der mathematischen Deduktion willen, von einer genauen Proportionalität zwischen den Fehlern und den gemessenen Größen ausgegangen. In praxi wird dies natürlich nie zutreffen; die proportionalen Fehler verhalten sich in dieser Beziehung ebenso wie die Fehler gleicher Ordnung. Messen wir mehrere Längen mit der Genauigkeit z. B. eines Millimeters, so können wir nicht darauf rechnen, daß sämtliche Längen mit genau demselben Fehler behaftet sind; die Fehler sind verschieden, schwanken aber um eine bestimmte Größe herum. Hinsichtlich der proportionalen Fehler sind die Verhältnisse ganz analog. Ist die Genauigkeit einer Messung ein bestimmter Bruchteil der gemessenen Größen, so werden diese Größen selbstverständlich nicht mit genau denselben relativen Fehlern behaftet; die

relativen Fehler schwanken aber um einen bestimmten Bruch herum. Berechnen wir also, nach der logarithmischen Ausgleichung, die Differenzen zwischen den gemessenen und den ausgeglichenen Größen, d. h. die Fehler, so wird es sich zeigen, daß die absoluten Werte dieser Fehler höchst verschieden sein können, die relativen Werte, d. h. die Verhältnisse der Fehler zu den gemessenen Größen, schwanken aber um einen gewissen Bruch. Ein Beispiel wird die Sachlage am besten erleuchten.

Beispiel. Die Dämmerungswerte eines von einem Auerbrenner entworfenen Dispersionsspektrums wurden auf die Weise bestimmt, dafs die Intensität der verschiedenen Spektralfarben bis zu der Gröfse geschwächt wurde, wo die Helligkeit der Farbe derjenigen eines konstanten weifsen Lichtes gleich erschien[1]). Bei vollständiger Dunkeladaptation wurden für jede Farbe zehn Bestimmungen gemacht, deren Mittel den gesuchten Bruchteil β des farbigen Lichtes angibt. In Tab. 8 sind unter λ die Wellenlänge der untersuchten

Tabelle 8.

λ	$10^8\beta$	z	$((z))$	ber. $10^8\beta$	$10^8 f$	$\frac{f}{\beta}$
670	46 700	4,6693	4,7296	53 650	— 6950	0,129
650	17 420	4,2410	4,1706	14 810	+ 2610	0,176
630	3 944	3,5959	3,6499	4 466	— 522	0,117
610	1 480	3,1703	3,1289	1 346	+ 134	0,099
590	456	2,6590	2,6306	427	+ 29	0,068
570	178	2,2504	2,2635	183	— 5	0,027
550	116	2,0645	2,0378	109	+ 7	0,064
530	115	2,0607	2,0494	112	+ 3	0,027
510	183	2,2625	2,3457	222	— 39	0,175
490	678	2,8312	2,7972	627	+ 51	0,081
470	2 150	3,3324	3,3453	2 215	— 65	0,029
450	8 850	3,9469	3,9721	9 378	— 528	0,056
430	43 100	4,6345	4,6188	41 580	+ 1520	0,037

Spektralfarben, unter $10^8\beta$ der für jede Farbe gefundene Bruchteil der Intensität des Spektrums, mit 10^8 multipliziert, angeführt. Jeder dieser Werte mufs mit einem Fehler behaftet sein, der ebensowohl positiv als negativ sein kann. Um die Werte möglichst fehlerfrei zu erhalten, können wir es also versuchen, die Fehler auszugleichen, indem β als eine Funktion der Wellenlänge λ betrachtet wird. Da die sukzessiven Werte β hier äufserst verschieden sind, würde eine Ausgleichung dieser Gröfsen unzweifelhaft zu sinnlosen Resultaten führen. Aufserdem wissen wir ja, dafs die Genauigkeit der Messung

[1]) Die Helligkeit des weifsen Lichtes war 1ie, vgl. Psychodynamik, S. 152, wo der angewandte Apparat und das Verfahren beschrieben sind.

von der Unterschiedsempfindlichkeit abhängig ist; da diese, bei der untersuchten Intensität, in maximo für die betreffende Vp. 0,177 ist[1], steht also zu erwarten, daſs die relativen Fehler unterhalb dieser Gröſse liegen, während die absoluten Fehler kleiner als $0{,}177 \cdot 10^8\beta$ sind. Es kann also hier nur von einer logarithmischen Ausgleichung die Rede sein, was auch geradezu anschaulich hervortritt, wenn man in einer graphischen Darstellung $\log 10^8\beta$ als Ordinate, λ als Abszisse absetzt (vgl. Fig. 6). Die (durch kleine Zirkel angegebenen) End-

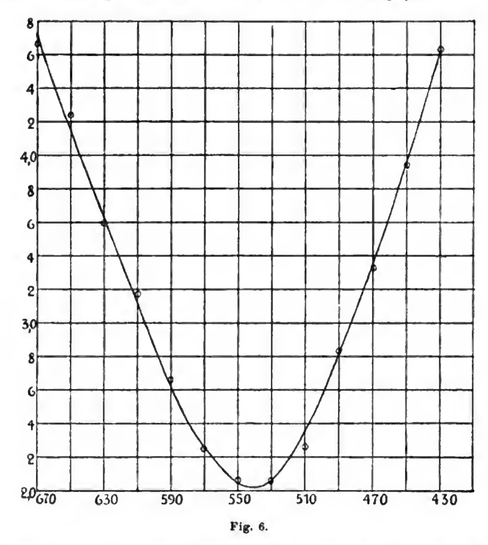


Fig. 6.

punkte dieser Ordinaten bestimmen augenscheinlich eine relativ einfache Kurve, von welcher die Werte ungefähr gleichgroſse Abweichungen in positiver und negativer Richtung zeigen, was mit anderen Worten nur heiſst, daſs eine Ausgleichung dieser logarithmischen Ordinaten wahrscheinlich zu der fehlerfreien Kurve führen wird. In der Tab. 8 ist $z = \log 10^8\beta$, und unter $((z))$ das Resultat einer zweifachen Ausgleichung dieser Werte, nach Gleich. 26, angeführt. Die Werte $((z))$ bestimmen die in Fig. 6 gezeichnete Kurve, so daſs die logarithmische Ausgleichung also unzweifelhaft den erwarteten Erfolg gehabt hat. Dies zeigt sich denn auch, wenn wir die Fehler bestimmen. Unter „ber. $10^8\beta$“ sind die Numeri der

[1]) Psychodynamik, S. 263, Tab. 31, Kolonne C.

Werte ((z)) angegeben; werden diese Gröfsen von den gemessenen $10^8\beta$ subtrahiert, erhalten wir die absoluten Fehler, $10^8 f$, die ganz unregelmäfsig in positiver und negativer Richtung schwanken. Die relativen Fehler $\frac{f}{\beta}$ sind, wie zu erwarten war, durchgängig kleiner als die Unterschiedsempfindlichkeit 0,177. Die Genauigkeit der Messung geht wohl am besten daraus hervor, dafs $\frac{f}{\beta}$ für $\lambda = 670$ bis 630 im Mittel etwas gröfser ist als für die übrigen Wellenlängen; das rote Ende des Spektrums zeigt nämlich noch eine Spur von Färbung, wodurch die Vergleichung erschwert wird, während der übrige Teil des Spektrums farblos ist und folglich dem Vergleichslichte identisch gemacht werden kann.

14. *Unsymmetrische Fehlerkurven.* Im vorhergehenden haben wir gesehen, wie man eine Reihe mit Fehlern behafteter Funktionswerte behandeln kann, um die Fehler so weit möglich gegeneinander auszugleichen. Als Beispiele dieser Operation haben wir hauptsächlich solche Funktionswerte betrachtet, die als mittlere Werte wiederholter Beobachtungen hervorgegangen waren, so daß die denselben anhaftenden Fehler nur als unausgeglichene Zufälligkeiten angesehen werden konnten. Es leuchtet aber unmittelbar ein, daß die Methode sich ebensowohl anwenden läßt, um die Streuung der Fehler bei der wiederholten Messung einer einzelnen Größe zu bestimmen. Wenn die Messung von den in Kap. 7 besprochenen, variablen Fehlerursachen beeinflußt wird, können die Fehler sich nicht nach dem Gaußschen Gesetze verteilen, und man muß daher die faktische Verteilung der Fehler bestimmen, um das wahrscheinliche Resultat der Messung berechnen zu können. Die Aufgabe ist vollständig löslich, sobald nur hinreichend viele Einzelbeobachtungen vorliegen, indem die relative Häufigkeit y, mit welcher ein bestimmter Wert x bei der Messung herauskommt, immer eine Funktion von x sein wird und folglich nach den im vorhergehenden dargelegten Prinzipien zu behandeln ist.

Sehr einfach stellt sich die Sache in dem besonders bei psychologischen Messungen häufig vorkommenden Falle, daß das Resultat der Messung in der Form vorliegt, wie häufig gewisse konstante Werte x_1, x_2, x_3 . . . . eine bestimmte Bedingung erfüllt haben. Es ist hier also die Häufigkeit y einfach als Funktion des Argumentes x gegeben. Im folgenden wird von solchen Fällen oft die Rede sein (vgl. Kap. 17, 21, 22). Etwas verwickelter stellt sich die Sache, wenn sämtliche oder fast sämtliche Einzelbeobachtungen verschieden sind. Dies kann sehr leicht vorkommen, wenn die einzelnen Werte mit

einer zu großen Genauigkeit abgelesen werden. Würde man z. B. bei einer Untersuchung des Augenmaßes, wo die einzelnen Werte bis zu 10 mm differieren könnten, mit der Genauigkeit 0,001 mm ablesen, so würden aller Wahrscheinlichkeit nach unter hundert Messungen keine zwei dasselbe Resultat geben. Selbst wenn aber kein solches Mißverhältnis zwischen der Genauigkeit der Einstellung und der des Ablesens stattfindet, kann die Anzahl der genau übereinstimmenden Ergebnisse gering werden. Man teilt daher die ganze Strecke, über welche sich die Werte verteilen, in eine passende Anzahl kleinere Strecken, und zählt auf, wie viele Werte in jeder Gruppe liegen. Diese Zahlen sind dann als die Häufigkeit des mittleren Wertes jeder Strecke anzusehen. Werden die Mittelwerte der Strecken als Abszissen, die Häufigkeiten als Ordinaten der betreffenden Punkte abgesetzt, so läßt sich die Fehlerkurve zeichnen. Unter der Voraussetzung, daß variable Fehlerursachen sich geltendgemacht haben, wird die Kurve eine unsymmetrische (vgl. Fig. 7).

Die auf die angegebene Weise bestimmte Fehlerkurve muß zuvörderst ausgeglichen werden. Da man nämlich willkürlich die Anzahl Werte, die innerhalb gewisser Grenzen liegen, in eine Ordinate vereinigt hat, kann die Abszisse der größten Ordinate nicht ohne weiteres als das Dichtigkeitsmittel angesehen werden. Das Dichtigkeitsmittel ist unzweifelhaft in der Strecke oder jedenfalls in der Nähe der Strecke zu suchen, welcher die größte Ordinate angehört; wo in dieser Strecke es aber liegt, kann nur aus der allgemeinen Form der Fehlerkurve abgeleitet werden; die wahrscheinliche Form der Kurve wird daher durch Ausgleichung bestimmt. Die Bestimmung des Maximumspunktes ist dann gewöhnlich recht einfach, weil die Fehlerkurven fast immer logarithmisch sind. Man braucht daher nur die Differenzen der Werte $\log. y$ zu bilden; es zeigt sich dann fast immer, daß die Differenzen dritter Ordnung nahezu konstant werden, so daß Gleich. 24 unmittelbar in Anwendung gebracht werden kann. Die Abszisse des gefundenen Maximumspunktes ist der wahrscheinliche Wert der Messung, eben weil die Häufigkeit ihres Vorkommens die relativ größte ist. Es erübrigt nur noch, die Genauigkeit der Messung zu bestimmen. Der wahrscheinliche Fehler kann hier nicht berechnet werden; dieser Begriff hat überhaupt nur für die Gaußsche Fehlerkurve Bedeutung. Ein durchschnittlicher Fehler genügt augenscheinlich nicht zur Bestimmung

der Fehlerstreuung, wenn die Kurve unsymmetrisch ist, weil die Verteilung der positiven und negativen Fehler ganz verschieden ist. Es ist also notwendig, die positiven und negativen Fehler zu trennen und für jede Gruppe einen durchschnittlichen Fehler, $+f_m$ resp. $-f_m$, zu berechnen. Aus den verschiedenen numerischen Werten dieser Größen ersieht man sofort die Unsymmetrie der Fehlerkurve.

B e i s p i e l. Nach Augenmafs wurde eine Linie einer gegebenen gleichgemacht; es liegen 48 Bestimmungen vor, die sich zwischen

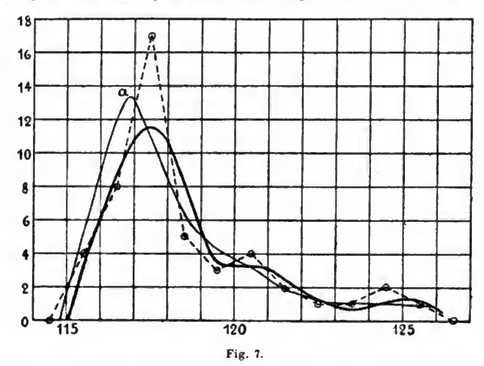


Fig. 7.

den Grenzen 115 und 126 mm verteilen. Zählt man die auf jeden Millimeter (115,0—115,99, 116,0—116,99 usw.) fallenden Beobachtungen auf, so erhält man folgendes Resultat:

$x =$	114	115	116	117	118	119	120
$y =$	0	4	8	17	5	3	4
$((y)) =$	—2,9	3,2	8,8	11,5	8,4	3,4	3,2

$x =$	121	122	123	124	125	126
$y =$	2	1	1	2	1	0
$((y)) =$	2,3	1,0	0,9	1,2	1,1	0,2

Die Werte x sind die gemessenen Längen, y die Häufigkeit ihres Vorkommens; die letzteren sind in der Fig. 7 als Ordinaten in den Punkten 115,5, 116,5 usw. abgesetzt und ihre Endpunkte durch punktierte Linien verbunden. Die Verteilung der Beobachtungsresultate ist unsymmetrisch und aufserdem ziemlich unregelmäfsig; die Werte y sind deshalb abwechselnd nach Gleich. 26a und 26b ausgeglichen; das Resultat findet sich in obiger Tabelle in der Reihe $((y))$. Diese Werte bestimmen die vollgezeichnete Kurve der Fig. 7. In der Figur kommt noch eine andere Kurve vor, deren Maximums-

punkt durch a bezeichnet ist. Diese Kurve erhält man, wenn man die Ausgleichung der y-Werte ausschliefslich mittels Gleich. 26a durchführt; es ist ersichtlich, wie diese asymmetrische Ausgleichung eine Verschiebung des Maximumspunktes herbeiführt.

x	$((y))$	$\log((y))$	$\triangle^{I}$	$\triangle^{II}$	$\triangle^{III}$
115,5	3,2	0,505			
			0,440		
116,5	8,8	0,945		***—0,324***	
			0,116		***0,071***
117,5	11,5	1,061		—0,253	
			—0,137		—,002
118,5	8,4	0,924		—0,255	
			—0,392		
119,5	3,4	0,532			

Den Maximumspunkt berechnen wir am einfachsten, Gleich. 24 zufolge, mittels der Differenzen der Werte log $((y))$, die aus dem obenstehenden Schema zu ersehen sind. Die Differenzen $\triangle^{III}$ konvergieren hier so, dafs fernere Interpolationen unnötig sind. Wir setzen also die hervorgehobenen Differenzen in Gleich. 24 ein und finden $n = 0{,}9$. Da hier $d = 1$, wird also die Abszisse des Maximumspunktes $x_u = 116{,}5 + 0{,}9 = 117{,}4$. Die Abweichungen der einzelnen gemessenen Werte von dieser Gröfse sind die Fehler; der mittlere Wert der positiven Fehler ist $+ f_m = 1{,}85$, der mittlere Wert der negativen $- f_m = 1{,}23$. Wenn man ohne nähere Untersuchung hier die Gültigkeit des Gaufsschen Gesetzes vorausgesetzt hätte, so wäre der mittlere Wert der Messungen $x_m = 118{,}2$ als der wahrscheinliche angesehen worden; der Unterschied zwischen den Gröfsen x_m und x_u ist aber unzweifelhaft nicht ohne Bedeutung (vgl. Kap. 18, Beispiel).

D. Die Bestimmung der Funktion.

15. *Die empirische Bestimmung einer algebraischen Funktion.* Wenn eine Reihe Funktionswerte y, bestimmten Argumenten x entsprechend, gemessen und, wo nötig, ausgeglichen sind, ist damit die funktionelle Beziehung zwischen den voneinander abhängigen Größen y und x tatsächlich bekannt. Durch Interpolation kann man dann immer den Funktionswert, der einem beliebigen Argumente entspricht, mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen. Dies Verfahren bleibt wohl stets das einfachste, wenn es sich nur um die Berechnung einiger Funktionswerte handelt. Es kann aber auch vorkommen, daß man die Beziehung zwischen y und x mathematisch zu formulieren, also die Funktion F zu bestimmen wünscht. Wenn z. B. Y eine bekannte Funktion von y ist, kann es von Bedeutung sein, einen mathematischen Ausdruck für Y durch x zu haben. In diesem Falle wird es also notwendig, y durch x auszudrücken, um $y = F(x)$ in die Gleichung $Y = \Phi(y)$ einsetzen zu können.

Die Beziehung zwischen y und x läßt sich nun immer in der Form einer algebraischen Gleichung darstellen, wenn die Differenzen höherer Ordnung gegen Null konvergieren (vgl. Kap. 10). Gleich. 16 zufolge ist ja nämlich:

$$y = F(x) = y_1 + (x - x_1)\,\delta_1^{I} + (x - x_1)(x - x_2)\,\delta_1^{II} + (x - x_1)(x - x_2)$$
$$(x - x_3)\,\delta_1^{III} + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gleich. 16)},$$

und wir brauchen also nur die Argumente x_1, x_2 usw. nebst den dividierten Differenzen δ_1^{I}, δ_2^{II} usw. einzusetzen, um eine Gleichung zwischen y und x zu haben. Sind die Argumente äquidistant, so ist statt Gleich. 16 Gleich. 15 anzuwenden. Die auf diese Weise aufgestellte Formel ist vollständig genau, wenn man sämtliche zur Verfügung stehende Argumente und die entsprechenden Differenzen einsetzt; sie kann aber auch, wie leicht ersichtlich, recht unhandlich werden, wenn sehr viele Glieder vorkommen. Vernachlässigt man aber die Differenzen höherer Ordnung, so wird dadurch zwar die Anzahl der Glieder reduziert, die Genauigkeit des Ausdruckes aber im entsprechenden Grade eingebüßt.

Durch ein sehr einfaches Verfahren kann man meistens diese Schwierigkeit umgehen. Die dividierten Differenzen erster Ordnung geben nämlich die mittlere Steigung der Funktion in den betreffenden Intervallen an. Wenn daher die Steigung der Funktion innerhalb gewisser Grenzen fast konstant bleibt oder, mit anderen Worten, wenn die Kurve hier fast geradlinig verläuft, so kann man die zwischen diesen Grenzen vorkommenden Funktionswerte einfach übergehen; die Grenzwerte und die daraus hervorgehenden dividierten Differenzen bestimmen dann die Funktion mit hinreichender Genauigkeit. Die Sache ist am leichtesten durch ein Beispiel zu erklären.

Betrachtet man die Fig. 6, so ist leicht ersichtlich, dafs die vier Strecken zwischen den Abszissen 670—610, 610—550, 530—490 und 490—430 fast geradlinig sind. Die Funktion ist daher durch diese Argumente und die entsprechenden Funktionswerte mit hinreichender Genauigkeit bestimmt. Aus der Tab. 8 können wir die ausgeglichenen Funktionswerte ((z)) entnehmen, die den genannten Argumenten entsprechen; da diese Argumente nicht äquidistant sind, müssen die dividierten Differenzen berechnet werden. In der Tab. 9 sind sämtliche Gröfsen zusammengestellt; um die vielen Dezimalstellen der Differenzen zu vermeiden, sind diese mit resp. 10^6, 10^7 usw. multipliziert. Aus der Tabelle geht hervor, dafs schon die Differenzen vierter Ordnung, δ^{IV}, sehr klein sind; sie können aber dennoch nicht gleich Null gesetzt werden, weil die beiden hier vor-

Tabelle 9.

λ	Dif. λ	$((z))$	$10^6 \cdot \delta^I$	$10^7 \cdot \delta^{II}$	$10^8 \cdot \delta^{III}$	$10^9 \cdot \delta^{IV}$	$10^{10} \cdot \delta^V$
670		4.7296					
	—60		26678				
610		3,1289		708			
	—60		18185		—117		
550		2,0378		2346		—3,4	
	—20		—580		—56		0,3
530		2,0494		3019		—11,7	
	—40		—18695		154		
490		2,7972		1167			
	—60		—30360				
430		4.6188					

kommenden Gröſsen mit groſsen Zahlen zu multiplizieren sind und daher das Resultat nicht unwesentlich beeinflussen. Setzen wir sämtliche Gröſsen in Gleich. 16 ein, erhalten wir folgende Formel:

$$z = \log 10^8 \beta = 4{,}7296 + (x-670)\,26678 \cdot 10^{-6} + (x-670)(x-610) \cdot 708 \cdot 10^{-7} - (x-670)(x-610)(x-550)\,117 \cdot 10^{-8} - (x-670)(x-610)(x-550)(x-530) \cdot 3{,}4 \cdot 10^{-9} + (x-670)(x-610)(x-550)(x-530)(x-490) \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-10}.$$

Diese Formel nimmt zwar einen nicht geringen Raum ein, ist aber doch viel einfacher als der Ausdruck, den man erhalten hätte, wenn sämtliche Werte der Tab. 8 zur Ableitung angewandt wären. Auſserdem ist sie in der vorliegenden Form für praktische Rechnungen sehr bequem, und ihre Genauigkeit ist selbstverständlich mit den Voraussetzungen übereinstimmend, die der Ableitung zugrunde gelegt wurden. So findet man z. B. nach der Formel für $\lambda = 470$ $z = 3{,}4596$; dieser Wert liegt aber eben in der Geraden, die durch die beiden nächsten Punkte, $\lambda = 490$ und $\lambda = 430$ entsprechend, gelegt werden kann. Dies kann nicht anders sein, weil wir von der Voraussetzung ausgingen, daſs die Kurve auf der betreffenden Strecke geradlinig verläuft.

16. *Die wahrscheinlichen Konstanten.* Auf die eben erörterte Weise kann eine beliebige Beziehung zwischen y und x durch eine ganze algebraische Funktion mit einer hinlänglichen Anzahl von Gliedern ausgedrückt werden. Führt man die Rechnungen der Gleich. 16 aus, und ordnet man die Glieder nach steigenden Potenzen, hat man also $y = p + qx + rx^2 + sx^3 + ..$ Die Konstanten, p, q, r . . . ., dieser Gleichung sind indessen nicht vollständig bestimmt, wenn eine große Anzahl Beobachtungen zusammengehörender Werte y und x vorliegen. Wir sahen ja eben im obigen Beispiele, daß wir von den 13 Messungen der Tab. 8 nur 6 nötig hatten, um die Beziehung zwischen λ und β mit befriedigender Genauigkeit auszudrücken. Die 6 Paar Werte wurden zwar nach einem bestimmten Prinzip gewählt, man hätte aber auch 6 andere

Wertpaare wählen können, die dieselben Bedingungen ebensogut erfüllen. Und wenn, entweder durch Messung oder durch Interpolation, zahlreiche neue Werte zwischen diejenigen der Tab. 8 eingeschaltet würden, so würde die Auswahl eine fast unbegrenzte werden. Jedes neue System von Werten, das zur Ableitung der Funktion $y = F(x)$ angewandt wird, würde aber eine von den früheren etwas abweichende Reihe Konstanten herbeiführen. Je nach den zur Berechnung angewandten Messungen kann man also y durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} y = p_1 + q_1 x + r_1 x^2 + s_1 x^3 + \ \ldots . \\ y = p_2 + q_2 x + r_2 x^2 + s_2 x_3 + \ \ldots . \\ \\ y = p_n + q_n x + r_n x^2 + s_n x^3 + \ \ldots . \end{array}\right\} \text{(Gleich. 27).}$$

Es wird folglich die Frage sein, welche dieser Gleichungen sämtlichen Messungen am besten entspricht.

Das hier erhobene Problem kann verallgemeinert werden, indem es durchaus nicht notwendig ist, daß y eine algebraische Funktion von x ist. In dieser Form erhalten wir sie immer, wenn die Funktion nach der Interpolationsformel dargestellt wird; es wird ja aber oft vorkommen können, daß auf theoretischem Wege eine rationelle Formel entwickelt werden kann, die dann überhaupt nicht algebraisch zu sein braucht. Es seien $k = \varphi_1(y)$, $a = \varphi_2(x)$, $b = \varphi_3(x)$, $c = \varphi_4(x)$ usw., wo $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ beliebige bekannte Funktionen bedeuten, und wir wünschen nun die Gültigkeit der rationellen Formel:

$$k = Xa + Yb + Zc \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Gleich. 28)}$$

für ein vorliegendes System von Messungen zu prüfen. Die unbekannten Größen entsprechen hier den Konstanten p, q, r usw. der Gleich. 27, indem es eben die Aufgabe ist, diejenigen Werte dieser Konstanten zu bestimmen, die die Messungen am besten befriedigen. Die Messungen haben, wie gewöhnlich, eine Reihe zusammengehörender Werte, x_1 und y_1, x_2 und $y_2 \ldots . x_n$ und y_n, ergeben. Setzen wir sukzessiv die zusammengehörenden Werte x und y in Gleich. 28 ein, so erhalten wir also für jedes Paar Werte eine neue Gleichung, im ganzen folglich ebenso viele Gleichungen, wie die Anzahl der Messungen beträgt. Zur Bestimmung der Konstanten haben wir also:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = Xa_1 + Yb_1 + Zc_1 \ldots . \\ k_2 = Xa_2 + Yb_2 + Zc_2 \ldots . \\ \\ k_n = Xa_n + Yb_n + Zc_n \ldots . \end{array}\right\} \text{(Gleich. 29),}$$

und es wird die Aufgabe, die Größen X, Y und Z so zu bestimmen, daß die möglichst vollständige Befriedigung der Gleichungen dadurch erzielt wird. Dies ließe sich sehr leicht erreichen, wenn die Messungen mit absoluter Genauigkeit ausgeführt wären. In diesem Falle brauchte man nämlich nur drei ganz beliebige Gleichungen zu wählen und sie mit Bezug auf X, Y und Z zu lösen: die so gefundenen Werte würden dann, in die übrigen Gleichungen eingesetzt, dieselben vollständig befriedigen. Nun sind aber die gemessenen Werte mit Fehlern behaftet, und folglich kann man erwarten, durch jede neue Wahl dreier Gleichungen eine neue Gruppe Konstanten zu finden. Aus n Gleichungen würde man auf diese Weise $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ verschiedene Gruppen von Konstanten erzielen, und es leuchtet also ein, daß die Berechnungen undurchführbar werden, sobald n eine große Zahl ist.

Um bei der Berechnung der Konstanten sämtliche Gleichungen (29) gleichzeitig zu berücksichtigen, kann man die Summationsmethode[1]) Fechners in Anwendung bringen, die jedenfalls ziemlich einfach ist. Man teilt die Gleichungen in so viele Gruppen, wie es zu bestimmende Konstanten gibt; ist n nicht durch diese Zahl teilbar, werden die restierenden Gleichungen vernachlässigt, und selbstverständlich werden dann solche Gleichungen ausgeschaltet, die als weniger zuverlässig anzusehen sind. Die Gleichungen jeder Gruppe werden summiert, und man hat folglich ebenso viele Gleichungen, wie es Unbekannte gibt; diese Gleichungen werden mit Bezug auf X, Y usw. gelöst. Die gefundenen Werte sind dann zwar nicht die wahrscheinlichen, liegen denselben gewöhnlich aber recht nahe. Man wird diese Methode stets in dem Falle anwenden können, wo die jetzt zu besprechende Methode der kleinsten Quadrate gar zu große Schwierigkeiten darbietet.

Wie schon oben bemerkt, wird die Bestimmung der Konstanten nur dadurch erschwert, daß die Messungen nicht fehlerfrei sind; statt der fehlerfreien Werte k kennen wir nur die Größen k_1+f_1, k_2+f_2 . . . k_n+f_n. Die Gleichungen 29 können also geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = -k_1 + Xa_1 + Yb_1 + Zc_1 \\ f_2 = -k_2 + Xa_2 + Yb_2 + Zc_2 \\ \\ f_n = -k_n + Xa_n + Yc_n + Zc_n \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gleich. 30).}$$

[1]) Fechner, Über die Maſsbestimmungen des Raumsinnes. Leipzig 1884. S. 106.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, daß die wahrscheinlichen Werte von X, Y und Z diejenigen sind, welche die Summe der Fehlerquadrate: $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2$ möglichst klein machen. Gehen wir davon aus, daß diese Fehler gleicher Ordnung sind, so läßt sich ferner nachweisen, worauf wir hier nicht näher eingehen können, daß die Summe der Fehlerquadrate Minimum wird, wenn die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -[k a] + [a a]\, X + [a b]\, Y + [a c]\, Z \\ 0 = -[k b] + [a b]\, X + [b b]\, Y + [b c]\, Z \\ 0 = -[k c] + [a c]\, X + [b c]\, Y + [c c]\, Z \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \text{(Gleich. 31).}$$

Die viereckigen Klammern stehen hier, der Einfachheit wegen, statt des Summationszeichens Σ. Es bedeutet nämlich:

$$[k a] = \Sigma k a = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n$$
$$[a a] = \Sigma a^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$
$$[a b] = \Sigma a b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \text{ usf.}$$

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen sind also die Summen sämtlicher Produkte der in den Gleichungen 30 vorkommenden bekannten Größen. Werden die drei Gleichungen 31 mit Bezug auf X, Y und Z gelöst, so sind die hierdurch gefundenen Werte die wahrscheinlichsten, weil die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird, wenn sie in die Normalgleichung (Gleich. 28) eingesetzt werden. Das Verfahren wird deshalb die Methode der kleinsten Quadrate genannt.

In der obigen Darstellung sind wir davon ausgegangen, daß $k = \varphi_1(y)$ sich nur durch drei verschiedene Funktionen von x, nämlich a, b und c, ausdrücken ließe:

$$k = \varphi_1(y) = a\, X + b\, Y + c\, Z \quad \ldots \quad \text{(Gleich. 28).}$$

Es kann natürlich sehr wohl vorkommen, daß zwei Funktionen $a = \varphi_2(x)$ und $b = \varphi_3(x)$ genügen; in diesem Falle kann man also $c = o$ setzen, und die Gleich. 28 reduziert sich auf:

$$k = \varphi_1(y) = a\, X + b\, Y \quad \ldots \quad \text{(Gleich. 32).}$$

Damit verschwinden selbstverständlich auch in den Bedingungsgleichungen (31) sämtliche Glieder, die c enthalten, und man hat dann nur zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -[k a] + [a a]\, X + [a b]\, Y \\ 0 = -[k b] + [a b]\, X + [b b]\, Y \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \text{(Gleich. 33).}$$

Wird endlich auch $b = o$, so erhält die Normalgleichung die Form:

$$k = \varphi_1(y) = a\, X \quad \ldots \quad \text{(Gleich. 34),}$$

und der wahrscheinliche Wert von X ergibt sich aus der Gleichung:

$0 = -[ka] + [aa] X$ . . . . (Gleich. 35).

Umgekehrt kommt es auch vor, daß k nur durch vier oder mehr Funktionen von x vollständig ausgedrückt werden kann, in welchem Falle sich die Anzahl der Bedingungsgleichungen entsprechend vermehrt und diese den Gleichungen (31) analog gebildet werden. Man vermeidet aber womöglich einen solchen Fall, denn schon die Bestimmung dreier Konstanten ist keine erfreuliche Arbeit; bei vier Konstanten wird die Arbeit wohl den meisten über den Kopf wachsen.

Die Schwierigkeiten, welche die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate darbietet, bestehen — von den ziemlich weitläufigen Zahlenrechnungen abgesehen — eigentlich nur in der Aufstellung der Normalgleichung. Erstens muß dieselbe, um nicht zu gar zu komplizierten Berechnungen Anlaß zu geben, in die Form der Gleich. 28 gebracht werden können. Zweitens ist zu beachten, daß man bei den meisten psychologischen Messungen mit proportionalen Fehlern zu tun hat, in welchem Falle die Bedingungsgleichungen (Gl. 31) nicht gültig sind (vgl. Kap. 13). Es dürfen folglich nur die relativen, nicht die absoluten Fehler als gleich groß angesehen werden, und die Normalgleichung ist deshalb in eine solche Form zu bringen, daß man nur relative Fehler ausgleicht. Nehmen wir als Beispiel die häufig vorkommende Gleich. 5a:

$$\frac{r - r_2}{r} = \varrho = u \cdot r^{v-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gleich. 5a).}$$

Hier ist der Normalreiz r gegeben, r_2 gemessen und folglich mit einem Fehler f behaftet, der fast immer als r_2 proportional angesehen werden kann. Man hat also $f = q r_2$, $r_2 + f = r_2 (1 + q)$ oder:

$$\frac{r - r_2 (1+q)}{r} = \frac{r - r_2}{r} - \frac{r_2}{r} q = \frac{r - r_2}{r} - q',$$

indem r_2 jedenfalls mit r wächst, wenngleich nicht dem r vollständig proportional. Gehen wir also von Gleich. 5a aus, so kommen nur die relativen Fehler in der Gleichung vor, und u und v lassen sich so bestimmen, daß diese relativen Fehler ein Minimum werden. Um dies zu erreichen, schreibt man die Gleichung:

$$\log \varrho = \log u + (v - 1) \log r.$$

Setzen wir hier $\log u = X$, $v - 1 = Y$, ist also:

$$0 = -\log \varrho + X + \log r \cdot Y,$$

und die Gleichung ist somit auf die Form der Gleich. 32 gebracht, indem $log\, \varrho = k$, $1 = a$ und $log\, r = b$. Es sind folglich die Summen der Produkte $[1 \cdot log\, \varrho]$, $[1^2]$, $[1 \cdot log\, r]$, $[log\, \varrho \cdot log\, r]$ und $[(log\, r)^2]$ zu berechnen und in die Bedingungsgleichungen (33) einzusetzen. Aus diesen findet man dann X und Y, woraus sich $v = Y + 1$ und $u = 10^X$ ergeben. Schließlich überzeugt man sich von der Richtigkeit der gefundenen Größen, indem man $\varrho = u\, r^{v-1}$ und ferner $r - r_2 = \varrho\, r$ berechnet.

Man könnte auch Gleich. 5a auf die Form: $r - r_2 = u\, r^v$ bringen und daraus die Normalgleichung:

$$log\, (r - r_2) = log\, u + v\, log\, r$$

ableiten, worin dann $log\, u = X$ und $v = Y$ zu setzen wären. In diesem Falle kommen also die absoluten Fehler des r_2 in der Gleichung vor, und es wird vorausgesetzt, daß sie derselben Ordnung sind, was tatsächlich unrichtig ist. Einerseits sollen also hier die vielmal größeren absoluten Fehler auf ein Minimum reduziert werden, anderseits wird eine falsche Voraussetzung in betreff der Größe derselben gemacht; folglich muß man jetzt zu einem viel ungenaueren Resultat als früher kommen. Dies wird denn tatsächlich auch immer der Fall sein; aus dem folgenden Beispiel ist der wesentliche Unterschied der beiden Berechnungsweisen leicht ersichtlich.

Beispiel[1]). In Tab. 10 sind die Resultate einer Untersuchung angegeben, die über die Bahnung der Gewichtempfindungen angestellt wurde. Unter r ist die Gröfse des Normalreizes, unter r_2 diejenige des zuzweit eintretenden Vergleichsreizes, beide in Kilogrammen, angegeben. Durch vorhergehende Einstellungshebungen wurde dafür Sorge getragen, dafs die Hubgeschwindigkeit beider

Tabelle 10.

r	r_2	$r-r_2$	ϱ	ϱ ber.	$r-r_2$ ber.	f	* $r-r_2$ ber.	* f	b
250	244	6	0,024	0,044	11	—5	20	—14	14
500	475	25	0,050	0,050	25	0	35	—10	20
750	687	63	0,084	0,055	41	22	49	14	23
1 155	1 092	63	0,055	0,060	69	—6	71	—8	38
1 500	1 400	100	0,067	0,063	95	5	88	13	57
2 000	1 873	127	0,064	0,067	134	—7	111	16	70
3 500	3 204	296	0,085	0,075	262	34	176	120	140
5 000	4 566	434	0,087	0,081	403	31	236	198	208

[1]) Vgl. Lehmann, Beiträge zur Psychodynamik der Gewichtempfindungen. S. 437 Tab. IIa.

Reize dieselbe wurde; r_2 wurde so variiert, dafs er dem r gleich erschien. Es sind ferner in der Tab. 10 $r-r_2$ und $\varrho = \frac{r-r_2}{r}$ angeführt, und es fragt sich jetzt, ob zwei solche Werte u und v bestimmt werden können, dafs die Gleich. 5 $\varrho = ur^{v-1}$ befriedigt wird. Der obigen Entwicklung zufolge werden dann die Summen: $[1 \cdot \log \varrho] = -9{,}755$, $[1^2] = 8$, $[1 \cdot \log r] = 24{,}75$, $[\log \varrho \cdot \log r] = -29{,}733$ und $[(\log r)^2] = 78{,}70$ berechnet, und nach Einsetzung dieser Gröfsen in die Gleich. 33 erhält man $Y = v - 1 = 0{,}204$ und $X = \log u = 0{,}151-2$, also $u = 0{,}01416$. Folglich soll $\varrho = 0{,}01416 \cdot r^{0{,}204}$ sein; die hieraus berechneten Werte ϱ sind in Tab. 10 unter ϱ ber. angegeben, wo ferner $r - r_2 = \varrho \cdot r$ nebst den Differenzen zwischen Messung und Berechnung $f = (r-r_2) - (r-r_2$ ber.) angeführt sind. Diese Fehler sind durchgängig sehr klein, jedenfalls viel kleiner als die nach der Genauigkeit der Messung möglichen Fehler — eine Frage, auf welche hier nicht näher eingegangen werden kann (vgl. Kap. 19).

Ganz andere Resultate erhält man dagegen, wenn man von der Gleichung $r - r_2 = ur^v$ ausgeht. Die Normalgleichung wird dann: $\log (r-r_2) = \log u + v \log r$, und die zu berechnenden Summen sind $[\log (r-r_2)] = 14{,}99$, $[1^2] = 8$, $[\log r] = 24{,}75$, $[\log (r-r_2) \cdot \log r] = 48{,}13$ und $[(\log r)^2] = 78{,}70$. Hieraus ergibt sich: $v = 0{,}824$ und $\log u = 0{,}325-1$, also $u = 0{,}2113$. Man hat folglich: $r-r_2 = 0{,}2113 \cdot r^{0{,}824}$, und die nach dieser Gleichung berechneten Werte sind in Tab. 10 in der Kolonne $^*r-r_2$ ber. angeführt. Die Differenzen $^*f$ zwischen Messung und Berechnung sind hier bedeutend gröfser als die früher gefundenen, unter f angegebenen, so dafs die weit gröfsere Genauigkeit der ersteren Methode mithin dargetan ist. Dafs aber die letztere Methode jedenfalls nicht sinnlos ist, geht daraus hervor, dafs auch die Fehler $^*f$ innerhalb der Grenzen der möglichen Abweichungen, b, liegen.

II.

Die Maßmethoden.

A. Die Methode der Reizfindung.

17. *Die Assoziationsmessungen.* Sehr einfach gestalten sich die Messungen, die den Zweck haben, die Anzahl Lesungen oder die angewandte Zeit zu bestimmen, welche erforderlich ist, um einen gegebenen Stoff auswendig zu lernen. Der Stoff kann entweder sinnvoll, gewöhnlich einem Dichterwerke entnommen, oder sinnlos sein. Wenn es sich um genaue, besonders um vergleichende Untersuchungen handelt, ist letzteres unbedingt vorzuziehen, weil die zahlreichen vorher gebildeten Assoziationen des sinnvollen Stoffes unvermeidliche Komplikationen herbeiführen, die sich nicht berechnen lassen. Der

sinnlose Stoff besteht fast immer, nach dem Vorschlag Ebbinghaus', aus einfachen Silben, die aus zwei Konsonanten mit einem dazwischenstehenden Vokale oder Diphthong gebildet werden. Es ist selbstverständlich dafür Sorge zu tragen, daß weder die einzelne Silbe noch mehrere derselben im Zusammenhang gelesen einen Sinn haben. Außerdem müssen besondere Vorsichtsmaßregeln getroffen werden, wenn die aus den Silben gebildeten Reihen gleichwertig sein sollen. Erstens darf keine Silbe mit demselben Konsonanten anfangen, mit welchem die vorhergehende Silbe endigte. Zweitens vermeidet man es, denselben Buchstaben als Anfangs- und Endkonsonanten einer Silbe anzuwenden. Drittens sind Lautähnlichkeiten der in einer Reihe vorkommenden Silben nach Möglichkeit auszuschließen. Dies ist in kürzeren, bis 16silbigen Reihen leicht dadurch zu erreichen, daß derselbe Anfangs- und Endkonsonant überhaupt nur einmal vorkommt; ebenso sorgt man dafür, daß kein Vokal mehrmals ohne Notwendigkeit wiederkehrt. Viertens dürfen in den verschiedenen Reihen einzelne Silben nicht häufiger als andere wiederkehren; am besten ist es, sämtliche zur Verfügung stehende Silben je einmal anzuwenden und dann mit demselben Material von vorn anzufangen.

Alle diese Vorsichtsmaßregeln können gleichzeitig berücksichtigt werden, wenn man bei der Herstellung der Silbenreihen auf folgende praktische Weise verfährt[1]). Jeder Anfangs- und Endkonsonant und jeder Vokal wird auf einen kleinen Zettel geschrieben. Die Anfangskonsonanten werden in beliebiger Ordnung und neben denselben die Endkonsonanten, ebenfalls auf gut Glück, aufgelegt, indem man jedoch das oben besprochene, unstatthafte Aufeinanderfolgen der Konsonanten vermeidet. Zwischen die Konsonanten wird darauf ein Vokal eingeschoben, wobei man beachtet, daß keine solche Silbe bereits angewandt wurde. Dies erfordert natürlich, daß man über die „verbrauchten" Silben Rechnung hält, die in Form einer Tabelle leicht geführt werden kann. Tab. 11 zeigt ein Stück eines solchen Schemas, das am besten auf quadriertem Papier aufgestellt wird. Oben sind die Anfangskonsonanten, links die Endkonsonanten angeführt; die Kolumnen und Reihen sind so breit gemacht, daß dort, wo sie sich schneiden, jeder Vokal seinen bestimmten Platz haben kann. Hier werden die Vokale also eingetragen, und die Tabelle gewährt, wie

[1]) Müller und Schumann, Experimentelle Beiträge zur Untersuchung des Gedächtnisses. Zeitschrift f. Psych. Bd. 6.

ersichtlich, einen leichten Überblick über das verbrauchte Silbenmaterial; bei genauer Buchführung ist das Wiederholen einzelner Silben in verschiedenen Reihen ganz ausgeschlossen. Wenn das Schema vollgeschrieben ist, fängt man ein neues an, und das Silbenmaterial wird jetzt nochmals gleichmäßig

Tabelle 11.

Endkonsonanten.	Anfangskonsonanten.				
	b	*d*	*f*	*g*	*h*
b		*aa* *e i* *ö ü*	*e i* *ü*	*ä* *ei i* *o ö u ü*	*aa au* *ei eu*
d	*eu i* *o*		*a* *e* *o*	*a aa* *e ei*	*a aa ä*
f	*au* *eu i* *o u*	*ä* *o ü*		*aa ä au* *i* *u*	*a ä au* *e eu i* *ö*
g	*a aa ä* *ei* *u*	*aa au* *i*	*e ei eu*		*a* *ei* *u ü*

verbraucht. Auf diese Weise kann man, ohne besondere Schwierigkeit, ungefähr 125 16silbige Reihen herstellen, in welchen keine Silbe zweimal vorkommt.

Auf die besondere Technik der Assoziationsmessungen, die nach den zu untersuchenden Problemen vielfach variiert werden muß, können wir hier nicht näher eingehen[1]. Ob man aber sinnloses oder sinnvolles Material anwendet, ob man die Reihen einfach nach den Taktschlägen eines Metronoms abliest oder irgendeinen Apparat zur gleichmäßigen Vorführung der Reihen benutzt, ob die Reihen von Anfang bis zu Ende durchgelesen oder in Teilen gelernt werden, ist an und für sich gleichgültig; aus jedem einzelnen Versuche resultiert stets eine Zahl, die die Reproduzierbarkeit der Reihe unter den gewählten Umständen angibt. Werden die Umstände konstant gehalten, so zeigt es sich bei der Wiederholung der Messungen, daß die gefundenen Zahlen recht bedeutend

[1] Ebbinghaus, Über das Gedächtnis. 1885. Müller u. Schumann, a. a. O.

schwanken, und es wird also die Frage, ob diese Variationen einfach als zufällige Fehler betrachtet werden dürfen. Die Methode, nach welcher man dies untersuchen kann, wurde schon oben, Kap. 5, S. 24, angegeben; zur näheren Beleuchtung nehmen wir hier ein Beispiel aus den auf diesem Gebiete bahnbrechenden Untersuchungen von Ebbinghaus[1]).

Die Versuchsreihe umfafst die Resultate von 84 Versuchen. Jeder Versuch bestand in dem Lernen von je sechs Reihen zu 16 Silben, jedesmal bis zum ersten fehlerfreien Hersagen. Die hierzu erforderliche Gesamtzeit betrug im Mittel (Gleich. 7) 1261 Sekunden mit dem wahrscheinlichen Beobachtungsfehler $\pm$ 48,4 Sekunden (Gleich. 8). Um zu prüfen, ob die Abweichungen vom Mittel als zufällige Fehler angesehen werden könnten, wurde die Anzahl, A, der Fehler, die in bestimmten Intervallen, $\pm f/w = 1/10$, $1/6$, $1/4$ usw., vorkamen, aufgezählt. Dies läfst sich, wie ersichtlich, leicht tun, sobald die Fehler berechnet sind. Da nämlich $w = \pm 48{,}4$, so ist $f = w/10 = 4{,}8$, $f = w/6 = 8$ usw., und man zählt also einfach auf, wie viele Fehler innerhalb der Grenzen $-4{,}8$ und $+4{,}8$, -8 und $+8$ usw. vorkommen. Das Resultat ist in Tab. 12 aufgeführt, wo in der Reihe „A ber.“ die mittels Tab. 3 berechnete Anzahl Fehler, in der Reihe „A gef.“ dagegen die tatsächlich vorkommende Anzahl angegeben ist.

Tabelle 12.

$\frac{\pm f}{w}$	1/10	1/6	1/4	1/2	1	1 1/2	2	2 1/2	3
$\pm f$	4	8	12	24	48	72	96	121	145
A ber.	4,5	7,6	11,3	22,2	42	57,8	69	76	80
A gef.	4	7	12	23	44	57	68	75	81

Wie aus der Tab. 12 ersichtlich, besteht eine fast vollständige Übereinstimmung zwischen der aufgezählten und der berechneten Anzahl von Fehlern, was eigentlich recht sonderbar ist. Wir haben nämlich hier einen der früher (Kap. 7) besprochenen Fälle, wo jede Ablenkung der Aufmerksamkeit einen grofsen positiven Fehler herbeiführen wird, während grofse negative Fehler nur durch eine, schwerlich vorkommende, übermaximale Anspannung der Aufmerksamkeit eintreten können. Wenn nur zufällige Fehlerursachen vorkämen, würde sich die Verteilung der Fehler so gestalten, wie Ebbinghaus sie tatsächlich gefunden hat. Jede Ablenkung der Aufmerksamkeit kann aber auf die Assoziationsbildung nur die Wirkung haben, dafs die zum Erlernen der Reihe erforderliche Zeit verlängert wird. Treten also die Schwankungen der Aufmerksamkeit zu den zufälligen Fehlerursachen hinzu, so müssen sie zur Folge haben, dafs öfters gar zu lange Zeiten, also eine Anzahl von übermäfsig grofsen positiven Fehlern, gefunden werden, und die Verteilung der Fehler

[1]) A. a. O. S. 50.

wird somit eine unsymmetrische. So stellt sich die Sache erfahrungsmäfsig auch am häufigsten; die meisten Forscher auf diesem Gebiete haben wirklich ein Überwiegen der grofsen positiven Fehler gefunden. Wir werden gleich im folgenden ein Beispiel dieser Art betrachten. Wie es übrigens Ebbinghaus gelungen ist, die Unsymmetrie der Fehler zu vermeiden, läfst sich nicht mit Sicherheit angeben. Es ist aber recht wahrscheinlich, dafs die Ursache darin zu suchen ist, dafs er die verschiedenen, oben besprochenen Vorsichtsmafsregeln bei der Herstellung der Reihen nicht berücksichtigte. Dann können aber die zu erlernenden Reihen auch nicht äquivalent sein; einige Reihen sind leichter als andere, und durch diese leichteren Reihen können die negativen Fehler vergröfsert werden.

Durch Wiedererlernen der einmal erlernten Reihen kann man die Festigkeit der Assoziation zu jedem späteren Zeitpunkte bestimmen. Es sei G die Anzahl Lesungen, die durchschnittlich zum Erlernen einer neuen Reihe erforderlich ist, und g die Anzahl, die beim Wiedererlernen derselben Reihen um einen gegebenen späteren Zeitpunkt gefunden wird. Die Differenz $G - g$ ist dann die ersparte Anzahl Lesungen, welche Ersparnis von der noch bestehenden Festigkeit der Assoziation herrührt und folglich als Maß derselben angesehen werden kann. Diese Untersuchungsmethode wird daher das Ersparnisverfahren genannt.

Die Ursachen, die beim Neuerlernen der Reihen eine unsymmetrische Verteilung der gefundenen Werte herbeiführen können, beeinflussen auch das Wiedererlernen. Die Unsymmetrie kann mitunter eine ziemlich erhebliche werden, was sich aus den gefundenen Werten sofort ersehen läßt, wenn der mittlere Wert berechnet worden ist; die negativen Fehler sind dann zahlreicher als die positiven, erreichen aber nicht so große Werte wie diese. Das folgende Beispiel wird die Sache erleuchten.

An 50 aufeinanderfolgenden Tagen wurde jeden Tag um 9 Uhr vormittags eine 16 silbige Reihe gelernt. 36 Stunden später wurde die Reihe wiedererlernt; die hierzu erforderliche Anzahl Lesungen g ist in Tab. 13 angegeben, während in der Reihe A angeführt ist, wievielmal die verschiedenen Werte g gefunden wurden. Der mittlere Wert g_m, nach Gleich. 7 berechnet, wird $g_m = 11{,}14$. Folglich sind, wie aus Tab. 13 ersichtlich, 29 mal kleinere und nur 21 mal gröfsere Werte gefunden; die Streuung der Fehler ist also unsymmetrisch. Aufserdem erscheint die Sonderbarkeit, dafs der mittlere Wert ver-

Tabelle 13.

g	8	9	10	11	12	13	14	15
A	2	6	13	8	10	6	4	1
$((A))$	1,82	7,08	10,66	9,42	8,12	6,70	3,82	0,83

hältnismäfsig selten gefunden wird; wäre das Fehlergesetz für diese Messungen gültig, müfste das Dichtigkeitsmittel bei $g = 11$ liegen, während A im Gegenteil hier eben ein partielles Minimum zeigt. Es wird also notwendig, die wahrscheinliche Verteilung der g-Werte zu bestimmen, was durch Ausgleichung der A-Werte abwechselnd mittels der Gleich. 26a und 26b geschehen kann. Die zweimal ausgeglichenen Funktionswerte $((A))$ sind in Tab. 13 angeführt; die genauere Bestimmung des Maximumspunktes mittels der Differenzen log $((A))$, Gleich. 24 zufolge, zeigt, dafs $g = 9{,}9$ das Dichtigkeitsmittel ist. Es besteht hier also ein nicht geringer Unterschied zwischen dem mittleren Werte $g_m = 11{,}14$ und dem wahrscheinlichen Werte $g_w = 9{,}9$, dessen Nichtberücksichtigung unzweifelhaft in vielen Fällen zu falschen Resultaten Anlafs geben wird. Um die Genauigkeit der Messungen anzugeben, sind wegen der Asymmetrie der Fehlerkurve zwei Werte notwendig, nämlich die mittleren Werte der positiven und die der negativen Fehler; man findet $-f_m = 1{,}15$ und $+f_m = 1{,}70$.

Bei den in der Litteratur bisher vorliegenden Messungen dieser Art hat man sich, trotz der ausgesprochenen Unsymmetrie der Verteilungskurve, stets darauf beschränkt, die mittleren Werte der Resultate anzugeben. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß viele unerklärliche Sonderbarkeiten bei richtiger Berechnung dieser Messungen verschwinden werden.

18. *Die Vergleichung äquivalenter Reize.* Sehr häufig liegt die Aufgabe vor, den Einfluß verschiedener Umstände auf die Auffassung eines gegebenen Reizes zu untersuchen. Man kann dann diesen Reiz, den Normalreiz n, nach und nach von den verschiedenen zu untersuchenden Umständen beeinflußt werden lassen, indem man ihn jedesmal mit einem unter konstanten Bedingungen gehaltenen Reize v vergleicht, dessen Größe so variiert wird, daß v dem n gleich erscheint. Als Beispiele solcher Messungen können die folgenden erwähnt werden: Messung des simultanen oder des sukzessiven Lichtkontrastes, Bestimmung der Größen- oder Lagenveränderungen bei den geometrisch-optischen Täuschungen, Messung der Helligkeit verschiedener Farben, Vergleichung leerer und ausgefüllter Zeitstrecken usw. In allen diesen und vielen andern Fällen dreht es sich um die Vergleichung zweier verschiedenartiger Reize, die jedenfalls in einer Beziehung einander gleichgemacht und daher als äquivalent bezeichnet werden können. Meistens wird die Messung auf die Weise ausgeführt, daß mit dem unter den verschiedenen Umständen einwirkenden Normalreize konstanter Größe ein variabler Reiz verglichen wird, dessen Größe man so lange variiert, bis er dem Normalreize gleich erscheint. So kann z. B. die Größe des simultanen

Kontrastes auf die Weise gemessen werden, daß man einen Normalreiz konstanter Intensität *n* sukzessiv auf verschiedenen Hintergründen anbringt, während man einen variablen Reiz *v* auf einem Hintergrunde, dessen Intensität stets gleich derjenigen des Reizes ist, dem *n* subjektiv gleichmacht. An den verschiedenen Werten *v* hat man dann ein Maß der Größe des Kontrastes. Zuweilen kann es aber praktischer sein, den Normalreiz *n* unter völlig konstanten Verhältnissen zu halten und den variablen Reiz sukzessiv von den verschiedenen Umständen, deren Wirkung man zu untersuchen wünscht, beeinflußt werden zu lassen. Die heterochrome Helligkeitsvergleichung z. B. wird oft so ausgeführt, daß man die Intensität *v* der Farben verschiedener Wellenlänge variiert, bis ihre Helligkeit einem konstanten Weiß *n* gleich erscheint; *v* ist dann ein Maß der Helligkeit der verschiedenen Farben. Wie man in einem vorliegenden Falle am besten verfährt, wird teils von den zur Verfügung stehenden Apparaten, teils von den zu lösenden Problemen abhängig sein.

Bei allen Untersuchungen der erwähnten Art zeigt es sich erfahrungsmäßig, daß es gar keinen einzelnen, bestimmten Wert des variablen Reizes *v* gibt, der dem *n* gleich erscheint; man findet immer eine größere oder geringere Strecke, innerhalb welcher *v* dem *n* gleich beurteilt wird. Die Grenzen dieser Strecke können als die obere, v_o, und die untere, v_u, bezeichnet werden, indem $v_o > v_u$ vorausgesetzt wird. Um v_o und v_u zu bestimmen, verfährt man folgendermaßen. Man fängt z. B. mit einem Reize *v* an, der entschieden größer als *n* aufgefaßt wird, und man vermindert *v*, bis der Unterschied zwischen *n* und *v* eben unmerklich geworden ist; diejenige Größe des *v*, bei welcher der Unterschied eben verschwindet, ist ein Wert v_o. Darauf fängt man von unten an, mit einem Werte *v*, der entschieden kleiner als *n* erscheint, und man vergrößert *v*, bis der Unterschied eben unmerklich wird; diese Größe des *v* ist ein Wert v_u. Werden solche absteigenden und aufsteigenden Reihen mehrmals wiederholt, erhält man sowohl für v_o als v_u eine Reihe Werte; aus jeder derselben kann das Mittel berechnet und die Streuung der Fehler nach den in Kap. 5 angegebenen Methoden geprüft werden. Wenn die Streuung mit dem Gaußschen Fehlergesetze übereinstimmt, sind die mittleren Werte v_o und v_u die wahrscheinlichen, und jeder innerhalb dieser Grenzen liegende Wert *v* wird also gewöhnlich gleich *n* erscheinen. Es kann jedoch auch, wegen

der zufälligen Fehlervorgänge, vorkommen, daß ein solcher Wert entweder größer oder kleiner als n beurteilt wird. Die arithmetische Mitte $v_m = \frac{1}{2}(v_o + v_u)$ wird aber, weil sie von den beiden Grenzen gleichweit entfernt ist, am wenigsten einer solchen unrichtigen Schätzung ausgesetzt sein, oder mit anderen Worten: v_m ist der wahrscheinliche Wert des v, der gleich n beurteilt wird. Dies gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß die beiden Grenzen, v_o und v_u, mit gleicher Genauigkeit gemessen sind, was daran zu erkennen ist, daß die wahrscheinlichen Fehler dieser Messungen, w_o resp. w_u, gleichgroß gefunden werden. Ist dagegen $w_o \gtrless w_u$, wird der wahrscheinliche Wert v_w derjenigen Grenze näher liegen, die am genauesten geschätzt wird, und zwar so, daß seine Entfernung von den beiden Grenzen den wahrscheinlichen Fehlern der Grenzbestimmungen, also w_o und w_u, direkt proportional zu setzen ist. Man hat also in diesem Falle:

$$\frac{v_o - v_w}{v_w - v_u} = \frac{w_o}{w_u} \text{ oder } v_w = \frac{v_o \cdot w_u + v_u \cdot w_o}{w_o + w_u} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(Gleich. 36).}$$

Wenn $w_o = w_u$, geht Gleich. 36 in $v_w = \frac{1}{2}(v_o + v_u) = v_m$ über, führt also zu dem oben angegebenen mittleren Wert v_m als dem wahrscheinlichen.

In den häufigsten Fällen findet man $w_o = w_u$, und dann läßt sich das Resultat einer solchen Messung durch drei Größen vollständig angeben, nämlich: v_m, die Mittelbreite der Strecke $b = \frac{1}{2}(v_o - v_u)$, und entweder den wahrscheinlichen Fehler w oder den durchschnittlichen Fehler f_m der Grenzbestimmungen. Da b einfach die halbe Entfernung zwischen den Grenzen v_o und v_u ist, hat man $v_o = v_m + b$ und $v_u = v_m - b$. Durch die drei genannten Angaben sind also sowohl die Grenzen als der wahrscheinliche Wert und die Genauigkeit der Messung bestimmt. Ist dagegen $w_o \gtrless w_u$, sind vier Angaben notwendig, nämlich v_w, b, w_o und w_u. Aus Gleich. 36 erhält man dann:

$$v_u = v_w - \frac{2\,b\,w_u}{w_o + w_u} \ldots \text{(Gl. 37 a) und } v_o = v_w + \frac{2\,b\,w_o}{w_o + w_u} \ldots \text{(Gl. 37 b).}$$

Mitunter kommt es indes auch vor, daß die Grenzbestimmungen eine unsymmetrische Verteilung der Fehler zeigen. Wie in diesem Falle zu verfahren ist, wurde oben (Kap. 14) erörtert. Als Resultat der Berechnungen gehen, wie sonst, die wahrscheinlichen Werte v_o und v_u hervor; statt der wahrscheinlichen Fehler erhält man aber als Ausdruck der Genauigkeit der Messungen vier Werte, nämlich die positiven

und negativen durchschnittlichen Fehler sowohl der oberen als der unteren Grenze; wir können die numerischen Werte dieser Fehler $+f_{mo}$ und $-f_{mo}$, $+f_{mu}$, und $-f_{mu}$ bezeichnen. Es fragt sich nur noch, wie in diesem Falle aus v_o und v_u der wahrscheinliche Wert v_w zu berechnen ist. Dieser Wert wird aber derjenige sein, der die möglichst kleine Wahrscheinlichkeit darbietet, größer als v_o oder kleiner als v_u geschätzt zu werden. Die Genauigkeit der Messungen unterhalb v_u ist aber durch $-f_{mu}$, oberhalb v_o durch $+f_{mo}$ ausgedrückt, und zwar so, daß die Genauigkeit um so größer ist, je kleiner diese Fehler sind. Der Gleich. 36 analog kann man also setzen:

$$\frac{v_o - v_w}{v_w - v_u} = \frac{(+f_{mo})}{(-f_{mu})} \text{ oder } v_w = \frac{(-f_{mu})\,v_o + (+f_{mo})\,v_u}{(+f_{mo}) + (-f_{mu})} \ldots \text{(Gleich. 38)}.$$

Die Ausdrücke für v_o und v_u sind den Gleich. 37 analog, indem nur $-f_{mu}$ statt w_u und $+f_{mo}$ statt w_o zu setzen sind.

Beispiel. Um das Entwickelte etwas näher zu beleuchten, kehren wir zu den oben (S. 11) besprochenen Messungen der Müller-Lyerschen Täuschung zurück. Für jede der vier Raumlagen (Fig. 1) fanden wir einen Wert des variablen Reizes, und es wurde nachgewiesen, dafs der mittlere Wert dieser vier Gröfsen als von dem Raumfehler befreit angesehen werden durfte. In jeder Raumlage aber wurde sowohl eine obere als eine untere Grenze, v_o resp. v_u, bestimmt, und jede dieser Gröfsen ist wiederum das Mittel von zwölf Messungen. Die in jeder Raumlage gefundenen Werte v_o und v_u gehen aus Tab. 14 hervor.

Tabelle 14.

Raumlage	c	a	b	d	Mittel
v_o	122,5	124,0	122,6	123,0	123,0
v_u	118,1	118,7	117,4	118,5	118,2
Mittel	120,3	121,4	120,0	120,8	120,6

Wie aus der Tab. 14 ersichtlich, sind die mittleren Werte der Grenzen $v_o = 123,0$ und $v_u = 118,2$; die wahrscheinlichen Fehler (Gleich. 8) dieser Grenzbestimmungen sind $w_o = 2.98$ und $w_u = 1,56$. Die untere Grenze ist also weit genauer als die obere bestimmt worden. Da die mittleren Grenzwerte das Mittel von je 48 Einzelbestimmungen sind, können wir mittels Tab. 2 die Streuung der 48 Fehler berechnen, die unter Voraussetzung der Gültigkeit des Gaufsschen Gesetzes gefunden werden mufs. Die so berechnete Anzahl Fehler der verschiedenen Intervalle ist in Tab. 15 in der Reihe „A ber." aufgeführt; in den beiden andern Reihen sind die an der oberen bezw. unteren Grenze in den verschiedenen Intervallen gezählten Fehler angegeben. Die Übereinstimmung zwischen

den berechneten und den gefundenen Zahlen ist, wie ersichtlich, an der oberen Grenze sehr gut, an der unteren dagegen weniger befriedigend. Dies rührt davon her, dafs die negativen Fehler kleiner und folglich zahlreicher als die positiven sind; unter den 48 Fehlern sind 29 negativ, 19 positiv. Grofse negative Fehler kommen also hier, an der unteren Grenze, viel seltener vor als grofse positive, oder mit anderen Worten: die Genauigkeit wird um so gröfser, je kleiner der variable Reiz gemacht wird. Dies stimmt, wie man sieht, sehr gut mit der Tatsache, dafs die Genauigkeit der Bestimmungen an der unteren Grenze fast doppelt so grofs als an der oberen Grenze ist.

Tabelle 15.

$\pm \frac{f}{w}$	0,1	0,3	0,5	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
A berechn.	2,6	7,7	12,7	19,7	24	32,5	39,5	46	47,5
Obere Grenze . . .	1	8	15	18	23	34	38	48	
Untere Grenze . . .	3	5	16	24	27	38	42	45	46

Sehen wir von dieser Unregelmäfsigkeit der Fehlerstreuung ab — was übrigens nicht zulässig ist —, kann die Verteilung der Fehler an den beiden Grenzen graphisch so dargestellt werden, wie oben (Kap. 6) angegeben. Die Fig. 2 (S. 27) bezieht sich eben auf die hier besprochene Messung und zeigt deutlich den Unterschied der Genauigkeit der beiden Grenzbestimmungen Man ersieht auch sofort aus der Fig. 2, dafs der mittlere Wert, 120,6, der beiden Grenzwerte nicht der wahrscheinliche sein kann; dieser letztere mufs v_u näher liegen, wo die Fehler sich viel dichter scharen. Wäre nicht die Fehlerstreuung an der unteren Grenze eine unsymmetrische, so würde eben die Gleich. 36 für den vorliegenden Fall gelten, indem $w_o > w_u$, und man erhielte dann den wahrscheinlichen Wert der Messungen $v_w = 119{,}84$. Wegen der Unsymmetrie der Fehlerstreuung an der unteren Grenze dürfen wir aber bei diesem Resultate nicht stehen bleiben; es ist notwendig, die faktische Fehlerkurve und das Dichtigkeitsmittel dieser Messungen nach den früher angegebenen Prinzipien zu bestimmen. Diese Arbeit ist aber schon erledigt; das in Kap. 14 besprochene Beispiel einer unsymmetrischen Fehlerkurve bezieht sich eben auf die Messungen des v_u. Das (S. 60) gefundene x ist der wahrscheinliche Wert $v_u = 117{,}4$, mit den Fehlern $-f_m = 1{,}23$ und $+f_m = 1{,}85$. Da wir ferner $v_o = 123{,}0$ und $\pm f_m = 3{,}6$ haben, können wir diese Gröfsen in Gleich. 38 einsetzen; es ergibt sich dann schliefslich $v_w = 118{,}9$. Dies Resultat könnte übrigens schneller, mit weniger Mühe, erreicht worden sein, wenn man sämtliche Messungen, ohne die Bestimmungen der oberen und der unteren Grenze zu trennen, als eine unsymmetrische Fehlerkurve behandelt hätte.

In betreff der praktischen Ausführung der besprochenen Messungen ist noch verschiedenes zu berücksichtigen. Am einfachsten stellt sich die Sache, wenn es sich um gleichzeitige,

also räumlich nebeneinander gegebene Reize handelt. In diesem Falle läßt sich *n* konstant halten, während *v* kontinuierlich, absteigend oder aufsteigend variiert wird. Die genauesten Bestimmungen erhält man zweifelsohne, wenn die Versuchsperson selbst die Einstellungen der Grenzwerte ausführt, jedoch ohne den jedesmal eingestellten Wert ablesen zu können. Gestattet die Konstruktion des Apparates nicht, daß die Versuchsperson selbst einstellt, muß dies also von einem Assistenten nach den Angaben der Versuchsperson ausgeführt werden, und zwar so, daß die Variationen des Reizes *v* um so langsamer stattfinden, je mehr sich der Reiz dem gesuchten Grenzwerte nähert, damit dieser Grenzwert nicht überschritten wird. Findet trotzdem durch Unachtsamkeit ein Überschreiten der Grenze statt, so ist es am richtigsten, den gefundenen Wert sofort zu verwerfen und die Bestimmung zu wiederholen. Sucht man dagegen durch rückläufige Variationen des Reizes die Einstellung zu verbessern, so erhält man nicht den gesuchten Grenzwert, wo der Unterschied eben unmerklich wird, sondern nur den Wert, wo der Unterschied eben merklich zu werden anfängt, und diese beiden Größen sind, wie wir später sehen werden, durchaus nicht identisch.

Viel schwieriger stellt sich die Sache im zweiten Falle, wo es sich um sukzessiv einwirkende Reize handelt. Hier kann von einer kontinuierten Variation nicht die Rede sein. Wegen des Zeitfehlers, der von der Sukzession der Reize herrührt, und dessen Größe vom Intervalle zwischen den beiden Reizen abhängig ist, wird es nämlich notwendig, nach jeder neuen Einstellung des *v* nicht nur *v*, sondern auch *n* zu wiederholen. Die Veränderungen des variablen Reizes müssen also sprungweise ausgeführt werden, was die Dauer und die Schwierigkeit der Messung bedeutend erhöht. Sind die Stufen der Variationen zu klein, so ermüdet die Versuchsperson; sind sie zu groß, so wird die Genauigkeit der Messung dadurch gefährdet. Um beides zu vermeiden, verfährt man dann so, daß die Stufen anfangs, wo der Unterschied zwischen *n* und *v* noch groß ist, recht groß und allmählich, je mehr man sich der Grenze naht, immer kleiner genommen werden. Die Feststellung der Stufengröße muß dem Assistenten obliegen, der sich nach den Anweisungen der Versuchsperson: „Unterschied groß, klein, kaum merklich“, richtet. Werden die Veränderungen in der Nähe der Grenze nicht genügend fein abgestuft, kann es sehr leicht geschehen, besonders wenn der Experimentierende

stets auf dieselben Reizgrößen einstellt, daß die Streuung der Fehler geringer wird, als es dem Fehlergesetze zufolge möglich wäre. Die Genauigkeit der Messung scheint dann viel größer zu sein, als sie tatsächlich ist; das Resultat ist also eigentlich durch die unvermeidliche Mitwirkung des Experimentierenden verfälscht worden. Die Reizgrößen müssen also in der Nähe der Grenze äußerst fein abgestuft und womöglich bei jeder Wiederholung der Messung variiert werden. Eine solche Messung wird dann sehr viel Zeit in Anspruch nehmen, die noch dadurch verlängert wird, daß oft die Wiederholung eines Reizpaares, *n* und *v*, notwendig ist. Eine zufällige Ablenkung der Aufmerksamkeit wird nämlich die Folge haben, daß ein Unterschied zwischen *n* und *v*, der bei maximaler Konzentration der Aufmerksamkeit noch bemerkt werden könnte, jetzt unmerklich wird. Und dies geschieht selbstverständlich um so leichter, je geringer der Unterschied ist, je näher der Grenze man sich befindet. Würde man also, nachdem man sich stufenweise der Grenze genähert hat, den ersten Wert des *v*, der gleich *n* beurteilt wird, als einen Grenzwert rechnen, so könnte dadurch ein nicht unerheblicher Fehler entstehen, der sich schwierig kompensieren ließe, weil die Zahl der Messungen notwendigerweise eine beschränkte sein muß, da sie so viel Zeit beanspruchen. Es ist daher ratsam, wenn *v* gleich *n* geschätzt wird, dasselbe Reizpaar zu wiederholen, um sich zu vergewissern, daß das Gleichheitsurteil nicht bloß eine Zufälligkeit war. Manchmal merkt man dann bei der Wiederholung einen deutlichen Unterschied, und erst wenn das Urteil „gleich“ auch bei der Wiederholung des Reizpaares abgegeben wird, ist ein Grenzwert definitiv erreicht.

Was hier von der praktischen Ausführung der Messungen gesagt wurde, betrifft übrigens nicht ausschließlich die Vergleichung äquivalenter Reize, sondern ebensowohl die im folgenden (Kap. 19 und 20) zu besprechende Vergleichung gleichartiger Reize und gleich erscheinender Reizunterschiede, überhaupt jede Untersuchung, die nach der nämlichen Methode ausgeführt wird. Man nennt dieselbe entweder die „Methode der Minimaländerungen“ oder die „Grenzmethode; letzterer Name ist der kürzere, ersterer ist dagegen weit charakteristischer, indem er den genauen Gegensatz dieser Methode zur „Konstanzmethode“ (Kap. 21—23) angibt. Das hier dargestellte Verfahren, welches das „halbwissentliche“ genannt werden kann, wird nicht immer befolgt, obschon gewöhnlich

nur dieses zu genauen Resultaten führen kann. Halbwissentlich ist das Verfahren, weil die Versuchsperson sowohl Zeitals Raumlage der zu vergleichenden Reize und außerdem die Richtung der Veränderungen des variablen Reizes kennt. Selbst wenn dies alles der Versuchsperson nicht vorher mitgeteilt ist, wird es nämlich sofort bemerkt, wenn jede neue Reihe mit einem genügend großen Unterschiede der beiden Reize anfängt und die Veränderung des variablen Reizes systematisch ausgeführt wird. Die Versuchsperson ist dann gleich darüber im reinen, welcher Reiz der variable, und ob die Reihe eine ab- oder aufsteigende ist; dagegen kennt sie nicht die Größe des jedesmal beurteilten Reizes. Wenn auch diese Größe der Versuchsperson bekannt ist, dann ist das Verfahren völlig „wissentlich". Eine solche Kenntnis ist aber ziemlich gefährlich, weil dadurch die Möglichkeit entsteht, daß theoretische Vorurteile und allerlei Suggestionen das Urteil sogar gegen den Wunsch der Versuchsperson beeinflussen können; vollständig unbrauchbar wird das Verfahren selbstverständlich, wenn man mit wenig gewissenhaften Versuchspersonen zu tun hat.

Wie dem wissentlichen ist das halbwissentliche Verfahren auch dem „unwissentlichen" entschieden vorzuziehen. Unwissentlich kann das Verfahren nämlich nur dann sein, wenn die Veränderung des variablen Reizes völlig regellos ist; sobald eine systematische Variation ausgeführt wird, errät die Versuchsperson sogleich, welcher Reiz der variable ist, und in welcher Richtung die Veränderungen stattfinden. Eine regellose Variation des Vergleichsreizes ist aber in mehreren Beziehungen mißlich. Subjektiv wird das Vergleichen dadurch erschwert, daß der Normalreiz sich nicht dem Gedächtnis einprägen kann, und daß der bald stärkere, bald schwächere Vergleichsreiz stets überraschend wirkt, weil die Aufmerksamkeit sich nicht auf die zu erwartende Reizgröße einzustellen vermag. Objektiv bewirkt die unregelmäßige Variation des Vergleichsreizes, daß die Bahnung der sukzessiven Empfindungen geringer wird, indem jede Wiederholung eines Reizpaares, oder einander sehr ähnlicher Reizpaare, eine Verstärkung der Bahnung verursacht. Das unwissentliche Verfahren kann daher zu Resultaten führen, die von denjenigen des halbwissentlichen recht verschieden sind; unvergleichbar sind die Resultate schon wegen der gänzlich verschiedenen Genauigkeit der beiden Verfahrungsarten.

Aus dem oben Angeführten geht hervor, daß die Grenzmethode leicht und schnell zu genauen Resultaten führt, wenn es sich um kontinuiert variierte, gleichzeitige Reize handelt, daß sie aber sehr zeitraubend wird, wenn man sie auf sukzessive Reize, die stufenweise verändert werden müssen, in Anwendung bringt. In letzterem Falle verdient die „Konstanzmethode", wovon weiter unten (Kap. 21—23) die Rede sein wird, unbedingt den Vorzug. Auch nach dieser Methode können die Messungen wissentlich, halbwissentlich und unwissentlich — im hier gebrauchten Sinne dieser Wörter — ausgeführt werden, und was in betreff dieser verschiedenen Methoden hier gesagt worden ist, hat auch hinsichtlich der Konstanzmethode Geltung.

19. *Die Bestimmung der Bahnung und der Schwellen.* Während es bei der Vergleichung äquivalenter Reize wohl ausschließlich von Interesse sein wird, die als gleich beurteilten Reizgrößen festzustellen, bezweckte die Vergleichung gleichartiger Reize bisher fast nur die Bestimmung der Unterschiedsschwellen, indem diese Größen für die Prüfung des psychophysischen Grundgesetzes von entscheidender Bedeutung sind. Wenn es sich um gleichzeitige Reize handelt, sind gewöhnlich nur allein die Schwellenwerte von theoretischer oder praktischer Bedeutung; wenn dagegen von sukzessiven Reizen die Rede ist, kommen außerdem die als gleich geschätzten Reizgrößen in Betracht. Bei sukzessiven Reizungen entsteht nämlich, wie in Kap. 4 besprochen, wegen der Bahnung ein nicht eliminierbarer Zeitfehler, dessen Größe bestimmt werden muß, was einfach durch Messung desjenigen Wertes des zuzweit einwirkenden Reizes geschieht, welcher dem ersten Reize gleich beurteilt wird. In diesem Falle, bei der Vergleichung sukzessiver Reize, wird die Aufgabe also oft etwas komplizierter, als wenn die Reize simultan gegeben sind, und wir behandeln daher die beiden Fälle getrennt. Dagegen brauchen wir nicht die Bestimmung der Reizschwellen von derjenigen der Unterschiedsschwellen zu trennen. Die Reizschwelle ist nämlich die kleinste Reizgröße, die überhaupt eine Empfindung erregt; die Unterschiedsschwelle ist der kleinste Reizunterschied, der bemerkt werden kann. Die Reizschwelle ist folglich ein Spezialfall der Unterschiedsschwelle, der dann entsteht, wenn einer der zu vergleichenden Reize Null wird. Wir gebrauchen daher im folgenden, wo nicht besondere Umstände eine Trennung erfordern, der Kürze halber das Wort „Schwelle"

in der Bedeutung: Unterschiedsschwelle mit dem Spezialfall Reizschwelle.

Fangen wir mit dem komplizierteren Falle der sukzessiven Reize an, so wird es nicht notwendig, die beiden möglichen Zeitlagen getrennt zu behandeln. Wie schon oben (S. 18) hervorgehoben, sind die Bestimmungen dann am genauesten, wenn der variable Reiz zuzweit einwirkt, und für die meisten Untersuchungen werden die Messungen in dieser Zeitlage genügen. Was wir über dieselben hier darlegen werden, läßt sich übrigens ohne weiteres auf die andere Zeitlage übertragen, so daß wir nur die erstere zu berücksichtigen brauchen. Es sei also ein konstanter Normalreiz von der Intensität r gegeben, und wir suchen die Werte des zuzweit eintretenden, variablen Reizes r_2, die dem r gleich, ebenmerklich größer und ebenmerklich kleiner als r erscheinen. Bei diesen Bestimmungen ist zuvörderst zu beachten, daß die Größe der Bahnung vom Intervalle zwischen den beiden Reizen abhängig ist, so daß dies Intervall konstant gehalten werden muß. Geht man dann z. B. von einer Reizgröße r_2 aus, die größer als r erscheint, und wird r_2 nach und nach vermindert, so erreicht man erst den Punkt, wo der Unterschied zwischen r und r_2 eben unmerklich wird; diese Reizgröße bezeichnen wir als r_{2o}. Nimmt ferner die Größe des r_2 fortwährend ab, so wird schließlich r_2 ebenmerklich kleiner als r geschätzt; die betreffende Reizgröße bezeichnen wir als r_{II}. Läßt man dann r_2 wieder anwachsen, so verschwindet erst der Unterschied bei einer Reizgröße r_{2u}, die die untere Grenze der Gleichheit angibt, um dann wieder bei einer Reizgröße R_{II} hervorzutreten, wo r_2 ebenmerklich größer als r erscheint. In der absteigenden Reihe erhält man also r_{2o} und r_{II}, in der aufsteigenden r_{2u} und R_{II}, und diese vier Werte können folglich in einem Zuge bestimmt werden, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Ermüdung in gewissen Fällen, bei schwierigeren und daher lange dauernden Messungen, die Resultate nicht unerheblich beeinflussen kann[1]). Übrigens sind auch hier ganz die nämlichen Vorsichtsmaßregeln zu nehmen, die im vorigen Kapitel hinsichtlich der Vergleichung äquivalenter Reize besprochen wurden. Wenn die Bestimmung der vier Größen hinlänglich oft wiederholt worden ist, kann man den wahrscheinlichen Wert jeder Größe als das Mittel der Einzel-

[1]) Vgl. Beiträge zur Psychodynamik der Gewichtempfindungen, S. 465.

bestimmungen berechnen und ferner die Berechtigung dieser Berechnung durch die Prüfung der Fehlerstreuung untersuchen. Zeigt es sich dann, daß die Fehlerkurve irgendeiner der Größen unsymmetrisch ist, so sind die Berechnungen nach den in Kap. 14 erörterten Prinzipien auszuführen; ein solcher Fall wird jedoch nur ausnahmsweise vorkommen.

Die Werte r_{2o} und r_{2u} sind, wie gesagt, die obere resp. untere Grenze der Reizgrößen, die dem r gleich beurteilt werden. Sie entsprechen also den Werten v_o und v_u, die bei der Vergleichung äquivalenter Reize gefunden werden, und sind folglich genau wie diese zu behandeln. Die Werte R_{II} und r_{II} sind die Reizgrößen, die ebenmerklich größer bezw. kleiner als r beurteilt werden; folglich sind die Schwellen S_{II} und s_{II}:

$S_{II} = R_{II} - r$ . . . (Gleich. 39 a) und $s_{II} = r - r_{II}$ . . . (Gleich. 39 b).

Diese Bestimmung der Schwellen ist unzweifelhaft die richtigere, jedoch nicht die gewöhnliche. Bisher war es nämlich üblich, die Mittel $\frac{1}{2}(R_{II}+r_{2o})$ und $\frac{1}{2}(r_{2u}+r_{II})$ zu bilden und hieraus die Schwellen:

$$S_{II} = \tfrac{1}{2}(R_{II}+r_{2o}) - r \quad . \; . \; . \; \text{(Gleich. 40 a) und}$$
$$s_{II} = r - \tfrac{1}{2}(r_{2u} + r_{II}) \quad . \; . \; . \; \text{(Gleich. 40 b)}$$

zu berechnen. Die letztere Bestimmungsweise hat vor der ersteren den praktischen Vorzug, daß die gleiche Genauigkeit mittels der halben Anzahl auf- und absteigender Reihen erreicht wird. Außerdem sind die Werte, die nach der später (Kap. 22) zu besprechenden Konstanzmethode gefunden werden, der Theorie zufolge nur mit den nach Gleich. 40 a und b berechneten übereinstimmend; wenn es sich also um eine Vergleichung der beiden Methoden handelt, wird man fast immer genötigt, der Berechnung der Schwellen die Gleich. 40 a und b zugrunde zu legen.

Was hier hinsichtlich der vier Größen R_{II}, r_{2o}, r_{2u} und r_{II} angegeben wurde, läßt sich ohne weiteres auf die entsprechenden Größen der anderen Zeitlage, R_I, r_{1o}, r_{1u} und r_I übertragen.

In gewissen Fällen kommt es vor, daß außer den Zeitlagen auch noch die verschiedenen Raumlagen zu berücksichtigen sind. Dies wird z. B. bei den Gewichtempfindungen stattfinden, wo die nebeneinander stehenden Gewichte mit derselben Hand, also nacheinander, gehoben werden. Da der hebende Arm sich den beiden, links und rechts stehenden Gewichten gegenüber nicht in derselben Lage befindet, kann

hierdurch ein Raumfehler entstehen. Hat man daher eine auf- und absteigende Reihe so durchgemacht, daß z. B. das Normalgewicht links und das Vergleichsgewicht rechts standen, so müssen die Lagen der Gewichte vertauscht und die Reihen wiederholt werden. Nennen wir die beiden Raumlagen a und b, so erhält man also in jeder Zeitlage acht Größen, nämlich z. B.: $R_{a\,\mathrm{II}}$, r_{a2o}, r_{a2u}, und $r_{a\,\mathrm{II}}$ in der Raumlage a und $R_{b\,\mathrm{II}}$, r_{b2o}, r_{b2u}, und $r_{b\,\mathrm{II}}$ in der Raumlage b. Werden darauf die Mittel der zusammengehörenden Größen $\frac{1}{2}(R_{a\,\mathrm{II}}+R_{b\,\mathrm{II}})$, $\frac{1}{2}(r_{a2o}+r_{b2o})$, $\frac{1}{2}(r_{a2u}+r_{b2u})$ und $\frac{1}{2}(r_{a\,\mathrm{II}}+r_{b\,\mathrm{II}})$ berechnet, so kann man auf die früher (Kap. 3) angegebene Weise prüfen, ob die Raumfehler als eliminiert angesehen werden dürfen. Dies wird fast immer der Fall sein; findet es aber ausnahmsweise nicht statt, so läßt sich der Raumfehler nicht durch Berechnung eliminieren. Man muß dann zu künstlichen instrumentalen Anordnungen seine Zuflucht nehmen, indem die Gewichte z. B. auf einem Schlitten stehen, der von dem Experimentierenden links und rechts geschoben werden kann, so daß sich die beiden Gewichte der Versuchsperson stets in derselben Lage darbieten. Wenn die Technik und die Methodik immer Hand in Hand arbeiten, lassen sich die meisten Schwierigkeiten überwinden. Wir können also davon ausgehen, daß es stets auf irgendeine Weise gelingen wird, den Raumfehler so weit herabzusetzen, daß der nicht eliminierte Rest vernachlässigt werden darf. Man hat dann entweder, der Gleich. 39 analog:

$S_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}(R_{a\,\mathrm{II}} + R_{b\,\mathrm{II}}) - r$ . . . . . . (Gleich. 41 a) und

$s_{\mathrm{II}} = r - \frac{1}{2}(r_{a\,\mathrm{II}} + r_{b\,\mathrm{II}})$ . . . . (Gleich. 41 b)

oder auch, der Gleich. 40 analog:

$S_{\mathrm{II}} = \frac{1}{4}(R_{a\,\mathrm{II}} + R_{b\,\mathrm{II}} + r_{a2o} + r_{b2o}) - r$ . . (Gleich. 42 a)

$s_{\mathrm{II}} = r - \frac{1}{4}(r_{a2u} + r_{b2u} + r_{a\,\mathrm{II}} + r_{b\,\mathrm{II}})$ . . . (Gleich. 42 b).

Es kann nur Sache der Definition sein, ob man die Unterschiedsschwelle als den ebenmerklichen Reizunterschied oder als das Mittel des ebenmerklichen und des ebenunmerklichen Unterschiedes bestimmen will, und folglich kann man, je den Umständen nach, die Gleich. 39 und 41 oder die Gleich. 40 und 42 vorziehen. Dagegen ist es prinzipiell unrichtig, wenn man „die Schwelle“ als den mittleren Wert der oberen und unteren Schwelle bezeichnet, also $S = \frac{1}{2}(S_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{II}})$, was ebenfalls allgemein üblich ist. Die obere Schwelle S_{II} ist nämlich der Zuwachs, den der Normalreiz r erhalten muß, damit ein Unterschied ebenmerklich wird. Die untere Schwelle s_{II} ist aber der Zuwachs, welcher dem Normalreize

$r - s_{II}$ hinzuzufügen ist, um einen ebenmerklichen Unterschied hervorzubringen. Die beiden Schwellen beziehen sich somit auf ganz verschiedene Reizgrößen, und es hat durchaus keinen Sinn, einen mittleren Wert derselben zu berechnen. Nur wenn die verschiedenen Schwellen auseinandergehalten und die dynamischen Relationen jeder derselben bestimmt werden, ist auf ein Verständnis der oft recht verwickelten Verhältnisse zu hoffen [1]).

Bei gleichzeitigen Reizen vereinfachen sich die Messungen oft ganz bedeutend. Da es hier keine verschiedenen Zeitlagen gibt und folglich auch keine Bahnung zu bestimmen ist, hat man für die dem Normalreize gleich geschätzten Größen keinen Gebrauch. Es kommen somit in den beiden Raumlagen a und b im ganzen nur vier Größen in Betracht, nämlich R_a und R_b, die ebenmerklich größer, r_a und r_b, die ebenmerklich kleiner als der Normalreiz beurteilt werden. Die beiden Schwellen, die nach Gleich. 41a und b berechnet werden können, bieten übrigens in den meisten Fällen keine besonderen Eigentümlichkeiten dar und sind meistens auch fast identisch; es genügt daher vollständig, die eine, z. B. die obere, zu ermitteln. Außerdem wird man sich oft, z. B. bei optischen Untersuchungen, davon überzeugen können, daß die Raumlagen durchaus ohne Einfluß auf die zu vergleichenden Reizgrößen sind. Findet man also $R_a = R_b$, so kann sich die Messung einfach auf die Reizgröße R beschränken, die ebenmerklich größer als r erscheint.

Beispiel. Um später eine Vergleichung zwischen den Resultaten der Grenzmethode und denjenigen der Konstanzmethode durchführen zu können, wird hier eine vollständige Bestimmung nach der ersteren Methode angegeben. Die Untersuchung wurde mit Schallreizen ausgeführt; die zu vergleichenden Reize wurden mittels einer Pendel-

Tabelle 16.

	R_{II}	r_{2o}	r_{2u}	r_{II}
v	259	242	182	166.5
u	3,27	3,85	2,78	2,78
f_m	4.3	4,25	2,94	2,94

vorrichtung mit einem Intervalle von 1,25 Sek. automatisch ausgelöst. In auf- und absteigenden Reihen wurden die dem Normal-

[1]) Vgl. Psychodynamik, S. 86.

reize $r = 256$ entsprechenden vier Gröfsen, R_{II}, r_{2o}, r_{2u} und r_{II}, bestimmt. In der Reihe v der Tab. 16 sind die als Mittel von 20 Einzelbestimmungen berechneten Werte der vier Gröfsen angegeben; aufserdem sind die wahrscheinlichen Fehler w und die durchschnittlichen Fehler f_m angeführt. Diese Berechnungsweise wird hier genügen, weil die Fehlerkurven symmetrisch sind; es kommen nämlich gleichviele positive und negative Fehler vor. Dessenungeachtet entspricht die Streuung der Fehler, die aus Tab. 17 ersichtlich ist, dem Gaufsschen Gesetze nicht vollständig;

Tabelle 17.

$\pm \frac{f}{w}$	A ber.	A gezählt für			
		R_{II}	r_{2o}	r_{2u}	r_{II}
0,5	5,3	6	9	4	8
1,0	10	13	13	7	13
2,0	16,4	17	16	18	16
3,0	19	19	19	20	19

die Häufigkeit der kleineren Fehler ist an mehreren Stellen zu grofs. Dies rührt unzweifelhaft von dem oben (S. 78—79) besprochenen Umstande her, dafs der variable Reiz nicht genügend fein abgestuft wurde. Die berechnete Verteilung der Fehler ist in Fig. 8 graphisch dargestellt; hiervon wird weiter unten die Rede sein. (Kap. 21).

20. *Die Bestimmung gleich erscheinender Reizunterschiede.* Es seien drei, nur intensiv verschiedene Reize, R, M, r, gegeben, und wir nehmen an, daß $R > M > r$. Durch eine zweckmäßige Abstufung irgendeines der Reize läßt es sich erzielen, daß die beiden Reizunterschiede $R—M$ und $M—r$ gleich groß erscheinen. Solche Bestimmungen, die bisher bei den psychophysischen Untersuchungen eine nicht geringe Rolle gespielt haben, sind einerseits mit großen subjektiven Schwierigkeiten verbunden, was daraus hervorgeht, daß die gefundenen Werte des variablen Reizes nicht unerhebliche Schwankungen ausweisen. Anderseits sind die zwischen drei gleichzeitigen oder sukzessiven Reizungen stattfindenden dynamischen Vorgänge meistens so verwickelt, daß die Intensitäten der resultierenden Empfindungen nur annäherungsweise berechnet werden können [1]). Zur Prüfung theoretischer Voraussetzungen sind derartige Messungen daher nicht besonders geeignet. Da es jedoch vorkommen kann, daß Messungen dieser Art von entscheidender Bedeutung werden können,

[1]) Psychodynamik, S. 123—133, 274—277. Beiträge z. Psychodynamik, S. 454—458.

werden wir hier in Kürze das Verfahren und die Vorsichtsmaßregeln besprechen.

Wenn die drei Reize aufeinanderfolgen, ist es eine unumgängliche Bedingung konstanter Resultate, daß die beiden Intervalle gleichgroß und konstant gehalten werden. Unter den sechs möglichen Zeitlagen der drei Reize sind die vier deshalb unbrauchbar, weil die Intervalle der Reize, deren Unterschied verglichen werden soll, verschiedene Länge erhalten. Außerdem wird die Vergleichung der Reizunterschiede sehr erschwert, wenn diese Unterschiede nicht unmittelbar aufeinanderfolgen, sondern ineinander eingeschlossen sind. Die beiden erwähnten Umstände finden in den Zeitlagen rRM, MrR, MRr und RrM statt, indem vorausgesetzt wird, daß die zu vergleichenden Reizunterschiede $R - M$ und $M - r$ sind. Es erübrigen somit nur die Zeitlagen rMR und RMr, die ein einigermaßen genaues Vergleichen gestatten. Von diesen beiden ist aber die letztere deswegen weniger anwendbar, weil die Bahnungszuwächse der späteren und schwächeren Reizungen von den vorhergehenden stärkeren recht bedeutend werden und daher in den zu prüfenden Formeln nicht vernachlässigt werden können, während sie sich schwerlich mit Genauigkeit bestimmen lassen [1]). Man ist also meistens auf die Untersuchung der Zeitlage rMR beschränkt. Welchen der drei Reize man hier als den variablen wählt, ist unzweifelhaft nicht gleichgültig. In den bisher vorliegenden Untersuchungen wurde gewöhnlich die Stärke des mittleren Reizes M variiert; aus den schon oben (S. 18) angegebenen Gründen wird man wahrscheinlich eine größere Genauigkeit erzielen, wenn der zuletzt eintretende Reiz R der variable ist.

Bei gleichzeitigen nebeneinander einwirkenden Reizen sind in betreff der Raumlage dieselben Verhältnisse zu berücksichtigen, die hinsichtlich der Zeitlage dargelegt wurden. Die Reize, deren Unterschiede verglichen werden sollen, müssen nebeneinanderliegen, so daß nur die Raumlagen RMr und rMR zur Beurteilung kommen können. Wenn Kontrast und sonstige störende Einflüsse ausgeschlossen sind, wird wohl selten ein Unterschied zwischen diesen beiden Raumlagen zu finden sein. Dagegen ist es höchst wahrscheinlich, daß die räumliche Entfernung der drei Reize voneinander nicht ganz ohne Bedeutung ist; man ist meistens geneigt, einen Reiz-

[1]) Psychodynamik, S. 123—133.

unterschied um so größer zu schätzen, je weiter die Reize voneinander entfernt sind[1]). Es läßt sich also auch hier nicht vollständig von den Kapazitäten der psychischen Vorgänge abstrahieren[2]), und folglich ist hierauf Rücksicht zu nehmen, so daß dieselben keinen störenden Einfluß ausüben: die gegenseitigen Entfernungen der drei Reize müssen gleichgroß sein. Bei gleichzeitigen Reizen wird es aller Wahrscheinlichkeit nach ohne Bedeutung, welcher Reiz der variable ist.

In allen Fällen, sowohl bei simultaner als bei sukzessiver Anordnung der Reize, findet man nicht einen alleinigen Wert, des variablen Reizes, der die Gleichheit der Empfindungsunterschiede herstellt; der variable Reiz kann innerhalb gewisser Grenzen beliebig verändert werden, ohne daß die Gleichheit der Unterschiede dadurch gestört wird. Nehmen wir z. B. an, daß der mittlere Reiz M der variable ist, so findet man in den absteigenden Reihen eine obere Grenze M_o, wo der Reizunterschied $R - M_o$ eben aufhört, kleiner zu sein als der Unterschied $M_o - r$. In den aufsteigenden Reihen bestimmt man dagegen die untere Grenze M_u, wo der Unterschied $M_u - r$ eben aufhört, kleiner als der Unterschied $R - M_u$ zu sein. Jede Reizgröße innerhalb der Grenzen M_o und M_u wird folglich Gleichheit der Empfindungsunterschiede herbeiführen. In betreff der weiteren Behandlung der Messungsresultate gilt hier, was oben (Kap. 18) über die Vergleichung äquivalenter Reize angegeben wurde.

Die Vergleichung gleich erscheinender Reizunterschiede wird oft die „Methode der mittleren Abstufungen“ genannt, indem früher derartige Untersuchungen als eine Methode zur Prüfung des psychophysischen Grundgesetzes angewandt wurden. Zu diesem Zwecke sind die erwähnten Untersuchungen kaum mehr zu verwenden, da die Hemmungs- und Bahnungsverhältnisse dreier gleichzeitiger oder sukzessiver Reize gar zu kompliziert sind, um die Durchführung der Berechnungen mit der erforderlichen Genauigkeit zu gestatten. Dagegen wird schon eine leidliche Übereinstimmung der Messungen mit den Formeln zu dem Nachweis genügen, daß sämtliche das Urteil beeinflussende Faktoren berücksichtigt worden sind, und zu diesem Zwecke können derartige Bestimmungen wohl auch noch künftig ausgeführt werden. Es kann aber nur irreleiten,

[1]) Müller, Gesichtspunkte u. Tatsachen der psychophysischen Methodik, S. 237—238.

[2]) Vgl. Psychodynamik, S. 358—359.

wenn diese Methode als eine der Grenzmethode und der Konstanzmethode nebengeordnete aufgestellt wird. Es kann hiervon, wie leicht ersichtlich, gar keine Rede sein, indem die Bestimmung desjenigen Wertes des variablen Reizes, bei welchem die Reizunterschiede als gleich beurteilt werden, sowohl nach der Grenzmethode als nach der Konstanzmethode stattfinden kann, was übrigens auch von den anderen hier (Kap. 17—19) besprochenen Aufgaben gilt.

B. Die Methode der Urteilsfindung.

21. *Die Konstanzmethode, vollständiges Verfahren.* Die verschiedenen Aufgaben, die in betreff der Empfindungsvergleichung vorkommen können, zerfallen, wie wir gesehen haben, in zwei Hauptgruppen, je nachdem entweder die subjektive Gleichheit oder der ebenmerkliche Unterschied gegebener Reize und Reizunterschiede zu bestimmen ist. Es macht aber bei den Bestimmungen keinen wesentlichen Unterschied, ob die Größen, die einander gleichgemacht werden sollen, gleichartige oder

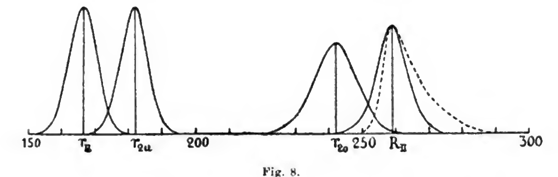


Fig. 8.

äquivalente Reize oder gar Reizunterschiede sind. Es wird also genügen, wenn wir im folgenden die beiden Hauptfälle, die Bestimmung der einander gleichen und die der ebenmerklich verschiedenen Reize, betrachten. Wir berücksichtigen daher bei der Darstellung der Konstanzmethode nur die Bestimmung der Bahnung und der Schwellen gleichartiger Reize. Hierdurch werden die beiden Hauptaufgaben beleuchtet werden, und was von den gleichartigen Reizen gilt, läßt sich, mutatis mutandis, leicht auf äquivalente Reize und Reizunterschiede übertragen.

Um den der Konstanzmethode zugrunde liegenden Gedanken verständlich zu machen, nehmen wir am besten ein Beispiel. In Fig. 8 ist die Fehlerstreuung der vier Größen R_{II}, r_{2o}, r_{2u} und r_{II}, die wir oben (S. 86) bei einer Schall-

untersuchung nach der Grenzmethode fanden, graphisch dargestellt. Betrachten wir zuerst den Wert R_{II}. Daß bei der Messung desselben überhaupt Fehler vorkommen, bedeutet ja nur, daß wegen unvermeidlicher beeinflussender Umstände einerseits Werte, die kleiner als R_{II} sind, vom Normalreize r unterschieden werden, anderseits aber Werte, die größer als R_{II} sind, dem Normalreize gleich geschätzt werden können. Eine solche falsche Schätzung wird aber um so seltener vorkommen, je mehr sich der Vergleichsreiz von dem Werte R_{II} entfernt. Obschon die Fehlerkurve theoretisch ins unendliche verläuft, erreicht man in praxi sehr bald Werte, die um so viel kleiner als R_{II} sind, daß sie nie größer als r beurteilt werden, und ebenso bald Werte, die um so viel größer als R_{II} sind, daß sie nie dem Normalreize gleich erscheinen. Stellen wir jetzt folgendes Experiment an: Dem Vergleichsreize werden nach und nach eine Reihe Werte gegeben, die um R_{II} liegen, also z. B. $v_1 < v_2 < v_3 < R_{II} < v_4 < v_5 < v_6$. Jeder dieser Werte wird, der Reihe nach, Nmal mit dem Normalreize r verglichen. Die Werte v, die kleiner als R_{II} sind, werden dem oben Gesagten zufolge um so häufiger gleich r und um so seltener größer als r beurteilt, je kleiner sie sind. Umgekehrt werden die Werte v, die größer als R_{II} sind, um so seltener gleich r und um so häufiger größer als r geschätzt, je größer sie sind. Die Größe R_{II} ist also eben die Grenze zwischen den Werten v, die am häufigsten gleich r, und denjenigen, die am häufigsten größer als r beurteilt werden, oder mit anderen Worten: In einer großen Anzahl Bestimmungen wird R_{II} ebenso oft vom Normalreize unterschieden wie nicht unterschieden werden.

Es ist leicht ersichtlich, daß diese Definition des Wertes R_{II} von der Form der Fehlerkurve völlig unabhängig ist. Selbst wenn die Verteilung der Fehler eine durchaus unsymmetrische wäre, z. B. die durch die punktierte Kurve der Fig. 8 dargestellte, würde R_{II} dessenungeachtet ebenso oft vom Normalreize unterschieden wie nicht unterschieden werden. Wenn die Fehler sich unsymmetrisch verteilen, wird der wahrscheinliche Wert einer gemessenen Größe nämlich immer als das Dichtigkeitsmittel bestimmt (Kap. 14), und ebendiese Stellung behauptet R_{II} in der unsymmetrischen Fehlerkurve der Fig. 8. Das Dichtigkeitsmittel ist aber der Wert, um welchen sich die Fehler am dichtesten scharen. Je mehr also ein Wert $r > R_{II}$ sich R_{II} nähert, um so häufiger

wird er dem Normalreize gleich geschätzt, und je mehr ein Wert $v < R_{II}$ sich R_{II} nähert, um so häufiger wird er größer als der Normalreiz beurteilt. Folglich wird R_{II} wieder der Grenzwert, der ebenso oft gleich r wie größer als r geschätzt wird. Die unsymmetrische Fehlerstreuung hat nur die Bedeutung, daß falsche Schätzungen oberhalb R_{II} in viel größeren Entfernungen als unterhalb R_{II} vorkommen.

Betrachten wir jetzt den Wert r_{2o}, so ist ersichtlich, daß genau dasselbe, was vom R_{II} gesagt wurde, auch vom r_{2o} gilt. Der Wert r_{2o} bildet die obere Grenze derjenigen Reizgrößen, die dem Normalreize gleich erscheinen. Ein Wert $v > r_{2o}$ wird folglich um so häufiger gleich r erscheinen, je mehr er sich r_{2o} nähert, und ein Wert $v < r_{2o}$ wird um so häufiger größer als r beurteilt, je mehr er sich r_{2o} nähert. Der Wert r_{2o} ist also auch der Grenzwert, der ebenso häufig vom Normalreize unterschieden wie nicht unterschieden wird. Daß es zwei solche Grenzwerte gibt, kann indes nicht wundernehmen, da sie unter ganz verschiedenen äußeren Umständen bestimmt werden. Wie im Kap. 19 erörtert, wird R_{II} stets in den aufsteigenden, r_{2o} dagegen stets in den absteigenden Reihen bestimmt, und diesem Unterschied der äußeren Umstände entspricht auch ein Unterschied der Beurteilungsweise. Wie schon im Kap. 18 hervorgehoben, ist, nach der Grenzmethode, ein Wert R_{II} erst dann als erreicht anzusehen, wenn der Vergleichsreiz bei Wiederholung desselben Reizpaares wieder größer als r beurteilt wird. Dagegen ist ein Wert r_{2u} erst dann erreicht, wenn der Vergleichsreiz bei Wiederholung des Reizpaares wieder dem r gleich geschätzt wird. Bei der Bestimmung R_{II} wird das Urteil „größer" folglich mit derselben Sicherheit gefällt wie das Urteil „gleich" bei der Bestimmung des r_{2o}, woraus das faktische Verhältnis $R_{II} > r_{2o}$ eine einfache Folge ist. Es bedarf wohl keiner Erwähnung, daß die Bestimmungen nach der Konstanzmethode nur dann mit denjenigen der Grenzmethode übereinstimmen können, wenn sie unter genau den nämlichen äußeren und inneren Umständen ausgeführt werden. Von diesem Punkte wird weiter unten die Rede sein.

Was hier von den Werten R_{II} und r_{2o} gesagt ist, gilt, wie leicht verständlich, auch von den Werten r_{2u} und r_{II}. Diese beiden Größen sind die Grenzwerte, die ebenso oft kleiner als r wie gleich r geschätzt werden, und sie unterscheiden sich dadurch, daß r_{II} in den absteigenden, r_{2u} in den aufsteigenden Reihen bestimmt werden. In der anderen Zeit-

lage endlich findet man die vier Größen R_1, r_{1o}, r_{1u}, und r_1, die den hier erwähnten analogen genau entsprechen.

Die praktische Anwendung der Konstanzmethode ist nach dem schon Gesagten ohne weiteres verständlich. Nehmen wir an, daß wir sämtliche vier Größen, R_{II}, r_{2o}, r_{2u} und r_{II} zu bestimmen wünschen. Durch vorläufige Versuche bestimmt man dann zwei Reizgrößen, deren eine entschieden kleiner, die andere entschieden größer als der Normalreiz erscheint. Diese Größen, v_a und v_k, werden so gewählt, daß ihre Differenz in eine passende Anzahl äquidistanter Stufen geteilt werden kann; man hat also z. B. folgende Reihe Reizgrößen: v_a, $v_a + d$, $v_a + 2d$, $v_a + 3d$, $v_a + 4d$ . . . . . v_k. Wünscht man nun mittels der Konstanzmethode dieselben Resultate zu erreichen wie z. B. nach dem halbwissentlichen Verfahren der Grenzmethode, so müssen die Bestimmungen selbstverständlich genau auf dieselbe Weise ausgeführt werden. Der Vergleichsreiz ist also in auf- und absteigenden Reihen systematisch zu verändern, und zwar so, daß die Versuchsperson die Größe des eben vorliegenden Vergleichsreizes nicht erraten kann. Zu diesem Zwecke werden die Vergleichsreize in zwei Reihen mit gleichgroßen Stufen geteilt, also v_a, $v_a + 2d$, $v_a + 4d$ . . . . . und $v_a + d$, $v_a + 3d$, $v_a + 5d$ . . . . . Jede dieser Reihen wird systematisch, auf- oder absteigend durchgemacht; der Versuchsleiter wechselt aber willkürlich mit den beiden Reihen ab, so daß die Versuchsperson nie weiß, welche Reihe eben vorliegt. Die abzugebenden Urteile sind: größer (g), gleich (u) und kleiner (k), die sich am bequemsten auf den zuzweit einwirkenden Reiz, in dem hier betrachteten Falle also auf den Vergleichsreiz, beziehen. Wird das Urteil unsicher, so muß das zu vergleichende Reizpaar einmal wiederholt werden, und erst dann wird das entscheidende Urteil abgegeben.

Man erhält auf diese Weise sechs Reihen von Urteilen, nämlich die g-, u- und k-Urteile der aufsteigenden und der absteigenden Reihen. Dem oben Gesagten zufolge bestimmen die g-Urteile der absteigenden Reihen — die wir der Kürze halber als $g\downarrow$ bezeichnen — den Wert r_{2o}; die k-Urteile der absteigenden Reihen, $k\downarrow$, bestimmen den Wert r_{II}; die k-Urteile der aufsteigenden Reihen, $k\uparrow$, den Wert r_{2u} und die g-Urteile der aufsteigenden Reihen, $g\uparrow$, den Wert R_{II}. Aus den beiden Reihen u-Urteilen, $u\downarrow$ und $u\uparrow$, kann man schließlich den Wert $(r_2)_u$ ableiten, der dem Normalreize gleich erscheint. Der nämliche Wert, $(r_2)_u$, kann aber auch aus den Größen r_{2o} und r_{2u}, nach

Gleich. 36 oder 38, berechnet werden, so daß diese beiden Bestimmungen sich gegenseitig kontrollieren. Es ist also jetzt nur die Frage, wie diese verschiedenen Berechnungen auszuführen sind.

Die vier Werte R_{11}, r_{2o}, r_{2u}, und r_{11} können nach den Müllerschen Formeln berechnet werden unter der Voraussetzung, daß die Urteile sich dem Gaußschen Gesetze gemäß verteilen. Ob dies aber der Fall ist oder nicht, läßt sich nicht im voraus entscheiden; man kann zwar aus einer graphischen Darstellung (vgl. Fig. 9) ersehen, wo das Gesetz mutmaßlich gültig ist; ob es aber genau befolgt wird, muß dahingestellt bleiben. Erst nachdem die recht schwierigen und umständlichen Berechnungen nach den Müllerschen Formeln erledigt sind, läßt es sich entscheiden, ob die Anwendung derselben im vorliegenden Falle berechtigt war. Und in den häufig vorkommenden Fällen, wo man sofort ersehen kann, daß die Verteilung der Urteile das Gaußsche Gesetz nicht befolgt (vgl. Fig. 10), sind die Müllerschen Formeln einfach unanwendbar. Der Vollständigkeit wegen werden diese Formeln in Kap. 23 angegeben; wenig geübten Rechnern ist es aber immer anzuraten, dieselben unberücksichtigt zu lassen, weil es eine viel einfachere und unter allen Umständen anwendbare Methode zur Berechnung der gesuchten Größen gibt.

Die Anzahl der abgegebenen Urteile irgendeiner Art, $g\uparrow$, $g\downarrow$, $u\uparrow$ usw., ist eine Funktion des Vergleichsreizes. Die angewandten Werte des Vergleichsreizes, v_a, $v_a + d$, $v_a + 2d$, $v_a + 3d$ usw., sind die äquidistanten Argumente, die auf jeden Wert fallende Anzahl Urteile die entsprechenden Funktionswerte. Man braucht also nur, falls es nötig ist, diese Funktionswerte nach den in Kap. 12 dargestellten Prinzipien auszugleichen und kann darauf die gesuchten Größen durch Interpolation berechnen. Die Größen R_{11} und r_{2o} sind ja nämlich die Werte des Vergleichsreizes, die ebenso oft gleich r wie größer als r geschätzt wurden. Wenn also jeder Vergleichsreiz, sowohl in den aufsteigenden als in den absteigenden Reihen, Nmal beurteilt worden ist, so sind die gesuchten Werte R_{11} und r_{2o} die Abszissen, welche der Ordinate $N/2$ der $g\downarrow$- bezw. $g\uparrow$-Kurven entsprechen, und auf analoge Weise sind die Werte r_{2u} und r_{11} aus den $k\downarrow$- und $k\uparrow$-Urteilen zu berechnen. Die Interpolation kann hier gewöhnlich einfach nach Gleich. 22 ausgeführt werden, indem die Kurven fast immer in der Nähe der gesuchten Werte geradlinig verlaufen.

Schließlich können die Werte r_w als das Dichtigkeitsmittel der $u\downarrow$- und $u\uparrow$-Kurven berechnet werden.

Es erübrigt noch, ein Maß der Genauigkeit festzustellen, mit welcher die gefundenen Größen bestimmt sind. Hinsichtlich der aus den *u*-Urteilen abgeleiteten Größen wird das Maß einfach der durchschnittliche Fehler, und wenn die Kurven unsymmetrisch sind, was wohl meistens der Fall sein wird, sind die mittleren Werte sowohl der positiven als der negativen Fehler anzugeben. Etwas schwieriger stellt sich die Sache in betreff der aus den *g*- und *k*-Urteilen berechneten Werte. Es ist zwar nicht unmöglich, auch hier die mittleren Werte der positiven und negativen Fehler anzugeben; das Verfahren kann aber recht kompliziert werden, und, was schlimmer ist: es wird nicht immer unzweifelhaft. Es ist deshalb einfacher, ein Präzisionsmaß zu suchen, das freilich nicht dem durchschnittlichen Fehler identisch ist, dieser Größe jedoch in einer Beziehung entspricht. Zu diesem Maße führt uns die folgende Betrachtung. Wir sahen oben (S. 28), daß die Wahrscheinlichkeit des durchschnittlichen Fehlers in der Gaußschen Fehlerkurve gleich $^8/_{11}$ der Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null ist. Ein Fehler Null wird aber dann gemacht, wenn in einer Einzelmessung eben der wahrscheinliche Wert sämtlicher Messungen gefunden wird. Der durchschnittliche Fehler ist also in der Gaußschen Fehlerkurve derjenige Fehler, dessen Ordinate gleich $^8/_{11}$ der Ordinate des wahrscheinlichen Wertes der Messungen ist. Diese Bestimmung eines Präzisionsmaßes läßt sich unzweideutig auf den hier vorliegenden Fall übertragen. Betrachten wir z. B. die *g*-Urteile. Der wahrscheinliche Wert dieser Messungen ist die Reizgröße, die ebenso oft „größer“ wie „nicht größer“ beurteilt wird, mithin $N/2$ der abgegebenen Urteile entspricht. Verteilen sich die Urteile nach dem Gaußschen Gesetze, so entspricht der durchschnittliche negative Fehler der Reizgröße, die $^8/_{11}$ mal so oft „größer“ beurteilt worden ist, oder mit andern Worten: $4\,N/11$ der abgegebenen Urteile. Und der durchschnittliche positive Fehler entspricht derjenigen Reizgröße, die $4\,N/11$ mal „nicht größer“ und folglich $N - 4\,N/11 = 7\,N/11$ mal „größer“ geschätzt wurde. Man braucht also nur die beiden Reizgrößen zu bestimmen, auf welche $^4/_{11}$ und $^7/_{11}$ der abgegebenen Urteile gefallen sind; die Differenzen zwischen diesen Werten und dem wahrscheinlichen Werte der Messungen sind dann die durchschnittlichen Fehler. Diese beiden Größen werden

sich selbstverständlich, unter Voraussetzung der Gültigkeit des Gaußschen Gesetzes, numerisch gleich mit entgegengesetztem Vorzeichen; ist die Fehlerkurve aber nicht die Gaußsche, so entsprechen die Größen nicht dem durchschnittlichen Fehler und werden sich schließlich numerisch ungleich, wenn die Fehlerkurve unsymmetrisch wird. Unter allen Umständen stimmen aber die auf die erwähnte Weise berechneten Fehlergrößen mit dem durchschnittlichen Fehler in der Beziehung überein, daß sie die nämliche Wahrscheinlichkeit haben; sie sind folglich mit dem durchschnittlichen Fehler vollständig vergleichbar.

Beispiel. Zur näheren Erläuterung der dargelegten Methode betrachten wir eine dem Beispiel im Kap. 19 analoge Untersuchung, die mit Schallreizen ausgeführt wurde. Der Normalreiz war wie früher $r = 256$, und es wurden zwei Reihen von Vergleichsreizen angewandt, nämlich 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58 und 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60. Diese Zahlen sind die abgelesenen Fallhöhen des Phonometers; in Schalleinheiten umgerechnet[1]) entspricht der Reiz 30 dem Werte 121,1 g-cm, und die konstante Differenz jeder Reihe ist 25,36 g-cm; sämtliche angewandte Vergleichsreize sind in Tab. 18 unter v angegeben. Jede Reihe wurde sowohl aufsteigend als absteigend 25 mal vorgenommen; es ist also $N = 25$. Das Verfahren war das halbwissentliche, in dem oben (Kap. 18)

Tabelle 18.

v	Absteigend						Aufsteigend					
	g	(g)	u	(u)	k	(k)	g	(g)	u	$((u))$	k	(k)
311,3	25						25					
298,6	25						25	24,9				
285,9	25	25,5					24	24,6	1	−0,1		
273,3	24	24,4	1	1,6			22	21,8	3	4,0		
260,6	19	19,1	6	5,9			15	13,5	10	12,0		
247,9	14	13,9	11	11,1			5	5,8	20	18,3		
235,2	8	7,4	17	17,5			2	1,7	23	22,7		
222,5	2	2,2	23	23,0					25	25,0		
209,9			25	24.9					24	24,3	1	0,2
197,2			23	22,7	2	2,3			22	20,3	3	4,0
184,5			18	18,4	7	6,7			14	14,0	11	10,7
171,9			12	11,3	13	14,4			7	7,1	18	19.2
159,2			3	4,0	22	21,7				0,1	25	24,0
146,5					25	24.6					25	25,0
133,8					25	25,1					25	
121,1					25						25	

angegebenen Sinne dieses Wortes, und in zweifelhaften Fällen wurde stets das betreffende Reizpaar wiederholt, und erst darauf

[1]) Über die Einheit der Schallstärke vgl. Psychodynamik, S. 64.

das entscheidende Urteil abgegeben. Sowohl in den absteigenden als in den aufsteigenden Reihen erhält man drei Gruppen von Urteilen, nämlich *g*-, *u*- und *k*-Urteile; die Anzahl dieser Urteile für jeden angewandten Vergleichsreiz ist in Tab. 18 aufgeführt. Die Resultate können graphisch dargestellt werden, indem *v* als Abszisse und die Anzahl der verschiedenen Urteile als Ordinate abgesetzt werden; man erhält auf diese Weise sechs verschiedene Kurven, die fast alle recht „glatt“ sind, so dafs sie keiner stärkeren Ausgleichung bedürfen. Wie aus Tab. 18 ersichtlich, sind die fünf Kurven blofs einmal, und nur die $u\downarrow$ zweimal ausgeglichen; die ausgeglichenen Werte sind, wie gewöhnlich, in Klammern angegeben und bestimmen, als Ordinaten abgesetzt, die Kurven der Fig. 9. Einige derselben weichen augenscheinlich nicht sehr viel von der

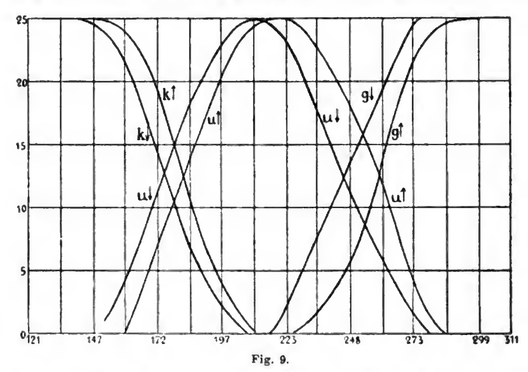


Fig. 9.

Gaufsschen Fehlerkurve ab; andere dagegen haben recht abweichende Formen.

Um die gesuchten Gröfsen zu finden, bestimmt man durch lineare Interpolation in den vier Reihen $(g)\uparrow$, $(k)\uparrow$, $(g)\downarrow$ und $(k)\downarrow$ die Werte *v*, die 12,5 Urteilen entsprechen, und auf dieselbe Weise werden die Fehler gefunden, indem man die Werte *v* bestimmt, welche $25 \cdot {}^4/_{11} = 9{,}1$ und $25 \cdot {}^7/_{11} = 15{,}9$ Urteilen entsprechen. Zu diesen Interpolationen können die Urteilszahlen herangezogen werden, die durch die Mitte-Interpolation der Ausgleichung gefunden wurden. Die Resultate sind in Tab. 19 angegeben, wo zuvörderst die vier direkt bestimmten Gröfsen R_{II}, r_{2o}, r_{2u} und r_{II} angeführt sind, und zwar sowohl die früher nach der Grenzmethode (Tab. 16) als die hier nach der Konstanzmethode gefundenen Werte, nebst den Fehlern der Messungen. Die Resultate der beiden Methoden stimmen vollständig; nur die Werte r_{II} weichen etwas voneinander ab, der Unterschied liegt jedoch an der Grenze der möglichen Abweichungen. Der durchschnittliche Fehler f_m der Grenzmethode

beträgt nur die Hälfte des Fehlers der Konstanzmethode; wie schon oben (S. 79 u. 86) angegeben, ist aber die grofse Genauigkeit der Grenzmethode eine ziemlich illusorische, so dafs diesem Unterschied kein grofses Gewicht beigelegt werden kann. Es kommt ferner in Tab. 19 der Wert $(r_2)_u$ vor. Bestimmt man das Dichtigkeitsmittel der beiden *u*-Kurven der Tab. 18, so findet man $v = 210$ und $v = 218$; der mittlere Wert dieser Gröfsen ist $(r_2)_u = 214$, und der positive und negative durchschnittliche Fehler desselben ist aus sämtlichen *u*-Urteilen berechnet. Schliefslich sind in Tab. 19 die drei

Tabelle 19.

	I. Grenzmeth.		II. Konstanzmeth.			III. Konstanzmeth. v. V.		
	r_2	$\pm f_m$	r_2	$\pm f_m$		v	$\pm f_m$	
R_{II}	259	4,3	259	+ 5	— 7			
r_{2o}	242	4,3	245	+ 8	— 7			
r_{2u}	182	2,9	182	+ 5	— 5,7			
r_{II}	166,5	2,9	174,5	+ 4,5	— 5,1			
$(r_2)_u$			214	+ 24	— 19,4	217,5	+ 25	— 33
$\frac{1}{2}(r_{2o} + r_{2u})$	212		213,5					
$\frac{1}{2}(R_{II} + r_{2o})$	250,5		252			251	+ 9	— 13
$\frac{1}{2}(r_{2u} + r_{II})$	174,3		178,3			171	+ 6,5	— 5,6

Mittelwerte $\frac{1}{2}(r_{2o} + r_{2u})$, $\frac{1}{2}(R_{II} + r_{2o})$ und $\frac{1}{2}(r_{2u} + r_{II})$ angeführt. Der erste dieser Werte soll mit $(r_2)_u$ identisch sein, was tatsächlich auch der Fall ist. Die Bedeutung der beiden anderen wird sich ergeben, wenn wir jetzt zur Besprechung der vereinfachten Konstanzmethode übergehen.

22. *Die Konstanzmethode, vereinfachtes Verfahren.* Wenn eine stufenweise, diskontinuierte Variation des Vergleichsreizes unvermeidlich ist, hat die Konstanzmethode, wie schon oben erwähnt, vor der Grenzmethode den entschiedenen Vorzug, daß die Variation des Vergleichsreizes nicht der Willkür des Versuchsleiters überlassen ist, wodurch unabsichtlich Entstellungen der Resultate herbeigeführt werden könnten. Das oben dargestellte vollständige Verfahren der Konstanzmethode, das übrigens meines Wissens noch nie in Anwendung gekommen ist, erfordert aber ebensoviel Zeit wie die Grenzmethode, einerseits weil die auf- und absteigenden Reihen getrennt zu behandeln sind, und folglich jede derselben eine genügende Anzahl Bestimmungen umfassen muß, anderseits weil die häufig vorkommenden zweifelhaften Urteile eine Wiederholung des betreffenden Reizpaares notwendig machen. Wenn man nämlich z. B. eine absteigende Reihe durchmacht, wird es oft

vorkommen können, daß ein Vergleichsreiz „klein" erscheint, unmittelbar nachdem das unzweifelhafte Urteil „groß" abgegeben wurde. In einem solchen Falle wird die gewissenhafte Versuchsperson selbst ihr Urteil als unsicher bezeichnen, eben weil es ein unerwartetes war, und das Reizpaar wird deswegen wiederholt. Am häufigsten stellt sich dann bei der Wiederholung eine der Größe des Vergleichsreizes besser entsprechende Auffassung ein. Auf diese Weise wird die Streuung der Urteile erheblich vermindert; es kommt in einer Reihe nur ausnahmsweise eine regellose Abwechslung der *g*-, *u*- und *k*-Urteile vor, und die Genauigkeit der Messung wird der durch die Grenzmethode erzielten fast gleich (s. Tab. 19). Das Verfahren nimmt aber viel Zeit in Anspruch. Der Zeitaufwand wird viel geringer, wenn man einerseits auf das Wiederholen der zweifelhaften Reizpaare verzichtet und anderseits die Urteile der auf- und absteigenden Reihen einfach addiert; man braucht dann nur jede dieser Reihen $N/2$ mal durchzumachen. Dieses vereinfachte Verfahren ist die übliche Form der Konstanzmethode.

Was in diesem Falle aus den Reihen der *g*-, *u*- und *k*-Urteile resultiert, kann nicht zweifelhaft sein. Die *u*-Urteile geben wie früher den Wert $(r_2)_u$. Da ferner aus den $g\downarrow$-Urteilen die Größe R_{11} und aus den $g\uparrow$-Urteilen die Größe r_{2o} abgeleitet werden können, muß folglich aus den summierten $g\downarrow$- und $g\uparrow$-Urteilen der mittlere Wert $\frac{1}{2}(R_{11} + r_{2o})$ resultieren. Analog erhält man aus den summierten $k\downarrow$- und $k\uparrow$-Urteilen den Wert $\frac{1}{2}(r_{2u} + r_{11})$, und durch die Bestimmung der Werte v, welche $4\,N/11$ und $7\,N/11$ der abgegebenen Urteile entsprechen, wird ein Maß der Genauigkeit der Messungen erreicht. Aus den *u*-Urteilen können, als Präzisionsmaß, einfach die mittleren Werte der positiven und negativen Fehler berechnet werden.

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, daß die Konstanzmethode, auch in dieser Form, sowohl wissentlich als halbwissentlich und unwissentlich ausgeführt werden kann, und daß eine Übereinstimmung der Resultate mit denjenigen der anderen Methoden nur dann zu erwarten ist, wenn die Messungen unter denselben subjektiven wie objektiven Bedingungen angestellt werden. Geschieht dies aber, so werden die Resultate auch übereinstimmend, was aus dem folgenden Beispiel zu ersehen ist.

Beispiel. Nach dem eben dargestellten Verfahren wurde eine Versuchsreihe mit Schallreizen ausgeführt, wo der Normalreiz

wiederum $r = 256$ war. Die Vergleichsreize waren dieselben wie im vorigen Beispiel (Kap. 21) und in die nämlichen beiden Gruppen gesondert; jede Gruppe wurde systematisch, auf- und absteigend

Tabelle 20.

r	g	$((g))$	u	$((u))$	k	$((k))$
311,3	25	25				
298,6	25	24,6		0,4		
285,9	22	22,2	3	3,0		
273,3	20	20,0	5	5,3		
260.6	16	16,0	9	9,0		
247.9	13	11,4	12	13,2		
235,2	7	8,6	17	16,4	1	0,1
222,5	7	6,4	18	18,8	0	0,3
209,9	4	4,0	19	18,4	2	2,8
197,2	2	2,0	18	17,4	5	4,4
184,5	2	0,6	15	16,7	8	6,4
171,9			16	12,3	9	12,3
159,2			6	6,8	19	18,2
146,5			3	3,6	22	21,5
133,8			2	1,7	23	23,3
121,1					25	24,9

durchgemacht. Wiederholungen der unsicher beurteilten Reizpaare waren nicht erlaubt, und folglich konnten in einer Reihe ziemlich

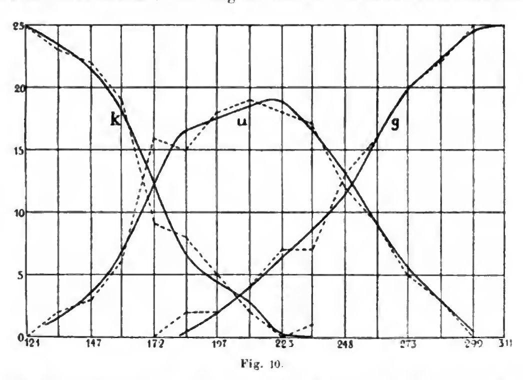


Fig. 10.

regellose Abwechslungen der *g*-, *u*- und *k*-Urteile vorkommen. Die eine Gruppe der Vergleichsreize wurde 13 mal absteigend und 12 mal aufsteigend, die andere Gruppe dagegen 12 mal absteigend und 13 mal aufsteigend durchgemacht, so dafs jeder Vergleichsreiz

25 mal beurteilt wurde. Die Resultate sind in Tab. 20 angegeben, wo in Klammern die ausgeglichenen Werte hinzugefügt sind; wegen der recht unregelmäfsigen Verteilung der Urteile war hier eine zweifache Ausgleichung notwendig. Die ausgeglichenen Urteilswerte sind als Ordinaten in Fig. 10 abgesetzt und bestimmen somit die drei Kurven, welche die unregelmäfsige Streuung der Urteile anschaulich darstellen. Die aus den verschiedenen Urteilszahlen berechneten Werte $\frac{1}{2}(R_{11}+r_{2o})$, $(r_2)_w$ und $\frac{1}{2}(r_{2u}+r_{11})$ sind in Tab. 19 in der Kolumne III nebst den Fehlern aufgeführt; diese Werte stimmen mit den nach den anderen Methoden gefundenen so genau überein, dafs es meines Ermessens keinem Zweifel unterliegen kann, dafs die verschiedenen Methoden unter genau den nämlichen Bedingungen zu denselben Resultaten führen werden. Wenn dies bei früheren Untersuchungen nicht immer der Fall war, rührt es eben daher, dafs die subjektiven Bedingungen in den zu vergleichenden Versuchsreihen nicht konstant gehalten wurden.

Es würde sehr wertvoll sein, wenn es zwischen den Größen $\frac{1}{2}(R_{11}+r_{2o})$, $(r_2)_w$ und $\frac{1}{2}(r_{2u}+r_{11})$ und ihren Fehlern solche Beziehungen gäbe, daß aus diesen Größen R_{11}, r_{2o}, r_{2u} und r_{11} berechnet werden könnten. Aus der Kolumne II, Tab. 19, ersieht man, daß annäherungsweise:

$$R_{11}-r_{2o}=2\cdot f_m \text{ und } r_{2u}-r_{11}=2\cdot f_m, \text{ woraus folgt:}$$

$$R_{11}=\tfrac{1}{2}(R_{11}+r_{2o})+f_m;\; r_{2o}=\tfrac{1}{2}(R_{11}+r_{2o})-f_m;$$

$$r_{2u}=\tfrac{1}{2}(r_{2u}+r_{11})+f_m;\; r_{11}=\tfrac{1}{2}(r_{2u}+r_{11})-f_m.$$

Wendet man diese Berechnungsweise auf die Zahlen der Kolumne III an, kommt man wirklich ungefähr zu den Werten, die nach den anderen Methoden gefunden wurden. Ferner ist aus Kolumne III ersichtlich, daß:

$$r_{2o}=(r_2)_w+f_m \text{ und } r_{2u}=(r_2)_w-f_m.$$

Diese Beziehung gilt aber gar nicht für die Zahlen der Kolumne II. Da übrigens die verschiedenen nachgewiesenen Beziehungen sich überhaupt nicht theoretisch dartun lassen, darf man ihnen kein zu großes Gewicht beilegen; sie können nötigenfalls nur zu einer ungefähren Bestimmung der betreffenden Größen dienen. Ganz zufällig sind sie selbstverständlich doch nicht. Die bei der Vergleichung gegebener Empfindungen gemachten Fehler sind unzweifelhaft von der Unterschiedsempfindlichkeit abhängig, so daß mit wachsender Differenz $R_{11}-(r_2)_w$ auch die Fehler wachsen. Die Größe und die Verteilung der verschiedenen Fehler sind aber von so vielen Bedingungen abhängig, daß eine konstante Beziehung zwischen der Unterschiedsschwelle und den Fehlern einer Messung

sich nicht formulieren läßt[1]), und eine darauf basierte Methode, wie Fechners sogenannte „Methode der mittleren Fehler", kann daher gewiß nur zu Täuschungen führen.

23. *Die Müllerschen Formeln.* Wie bereits oben gesagt, können die aus den *g*- und *k*-Urteilen zu berechnenden Größen nicht nur durch Interpolation, sondern auch — unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Fehlergesetzes — direkt bestimmt werden; die hierzu dienenden Formeln hat G. E. Müller angegeben. Wegen der Schwierigkeit der Rechnungen, und weil die Formeln nur unter einer Voraussetzung anwendbar sind, die wohl in den häufigsten Fällen nicht erfüllt wird, haben sie indes keine große praktische Bedeutung; von einem theoretischen Gesichtspunkte aus sind sie aber so interessant, daß sie hier jedenfalls einen Platz verdienen.

Nehmen wir an, daß wir nach dem Verfahren der Konstanzmethode die Reihen der Vergleichsreize Nmal durchgemacht haben. Aus den *g*- und *k*-Urteilen können dann die Größen $\frac{1}{2}(R_{II} + r_{2o})$ bezw. $\frac{1}{2}(r_{2u} + r_{II})$ berechnet werden, und den Gleich. 40 zufolge sind ferner:

$$S_{II} = \frac{1}{2}(R_{II} + r_{2o}) - r \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{(Gleich. 40 a) und}$$

$$s_{II} = r - \frac{1}{2}(r_{2u} + r_{II}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{(Gleich. 40 b).}$$

Zu den Müllerschen Formeln, nach welchen sich die Werte S_{II} und s_{II} berechnen lassen, kommen wir durch folgende Betrachtung. Es sei irgendein Vergleichsreiz v, und die Differenz $v - r = D$, wo D ebensowohl positiv wie negativ sein kann, und wo folglich mit Vorzeichen gerechnet werden muß. Wegen zufälliger Umstände ist die Schwelle S_{II} nicht konstant, sie schwankt innerhalb bestimmter Grenzen und

---

[1]) Dies scheint mir wenigstens das einfache Resultat der Lipps'schen Bemühungen zu sein. Auf fehlertheoretischer Grundlage hat nämlich Lipps (Die psychischen Mafsmethoden, S. 133 f.) Formeln entwickelt, welche es ermöglichen sollten, aus einer Reihe Messungen einer Gröfse, die einer gegebenen gleich gemacht wird, die Unterschiedsschwelle zu bestimmen. Die Formeln führen indes nur unter bestimmten Bedingungen zu einem Resultate, und es läfst sich in einem gegebenen Falle nicht im voraus entscheiden, ob die Bedingungen bei den vorliegenden Messungen erfüllt sind oder nicht. In dem von Lipps behandelten Beispiel, welchem ein sehr grofses und unzweifelhaft einwandfreies Versuchsmaterial zugrunde liegt, zeigt es sich nun eben, dafs die Bedingungen nicht erfüllt sind, so dafs die Berechnungen zu keinem brauchbaren Resultate führen. Man fragt sich dann recht natürlich, ob die Bedingungen überhaupt je erfüllt sein werden, oder ob das Problem nicht vielmehr einfach unlösbar ist.

kann die Größe $S_{11} \pm f$ haben. Der Vergleichsreiz r wird also „größer“ geschätzt, wenn $D > S_{11} \pm f$. Wenn $D > S_{11}$, erhält man immer ein g-Urteil, sofern f negativ ist; die Wahrscheinlichkeit sämtlicher negativen Fehler ist aber $\frac{1}{2}$. Außerdem erhält man ein g-Urteil, wenn $D - S_{11} > f$. Die Wahrscheinlichkeit positiver Fehler zwischen 0 und $f = D - S_{11}$ ist aber $[W]_o^{(D-S_{11})H}$, wo H das Präzisionsmaß ist. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit eines g-Urteiles insgesamt: $\frac{1}{2} + [W]_o^{(D-S_{11})H}$.

Wenn der betreffende Vergleichsreiz nun tatsächlich g mal „größer“ geschätzt worden ist, so ist die relative Häufigkeit der g-Urteile, d. h. ihre Wahrscheinlichkeit, g/N. Man hat also:

$$\frac{g}{N} = \frac{1}{2} + [W]_o^{(D-S_{11})H} \quad \text{oder} \quad \frac{2g}{N} - 1 = 2\,[W]_o^{(D-S_{11})H}$$

(Gleich. 43).

Eine analoge Betrachtung führt zu dem Ausdrucke des s_{11}, welche Größe aus den k-Urteilen berechnet wird. Es sei $D = r - v$; dann wird v „kleiner“ geschätzt, wenn $D > s_{11} \pm f$. Nehmen wir an, daß $D < s_{11}$; in diesem Falle erhält man ein k-Urteil nur, wenn f negativ ist und zugleich $f > s_{11} - D$. Die Wahrscheinlichkeit der Fehler zwischen 0 und $f = s_{11} - D$ ist aber $[W]_o^{(s_{11}-D)h}$, wo h das Präzisionsmaß ist. Die Wahrscheinlichkeit sämtlicher negativen Fehler ist $\frac{1}{2}$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit der negativen Fehler größer als f gleich $\frac{1}{2} - [W]_o^{(s_{11}-D)h}$. Wenn der betreffende Vergleichsreiz tatsächlich k mal „kleiner“ beurteilt worden ist, hat man also:

$$\frac{k}{N} = \frac{1}{2} - [W]_o^{(s_{11}-D)h} \quad \text{oder} \quad -\left(\frac{2k}{N} - 1\right) = 2\,[W]_o^{(s_{11}-D)h}$$

(Gleich. 44).

Die Größen $2g/N - 1$ und $-(2k/N - 1)$ der Gleich. 43 und 44 sind durch die Versuche für jeden angewandten Vergleichsreiz bekannt; die Wahrscheinlichkeiten sind also gegeben. Aus Tab. 1 kann man dann die entsprechenden Werte fh ablesen, nur ist darauf zu achten, daß Tab. 1 die Wahrscheinlichkeiten $[W]_{-fh}^{+fh}$ enthält. Da aber $[W]_{-fh}^{+fh} = 2 \cdot [W]_o^{fh}$, welche Größen in den Gleich. 43 und 44 vorkommen, so sucht man in Tab. 1 eben die Größen fh, welche den Wahrschein-

lichkeiten $2g/N - 1$ und $-(2k/N - 1)$ entsprechen. Für jeden Vergleichsreiz, der „größer“ beurteilt worden ist, erhält man einen Wert $(D - S_{II})H = T$ und ebenso für jede Anzahl k-Urteile einen Wert $(s_{II} - D)h = t$. Sind die Größen $2g/N - 1$ und $-(2k/N - 1)$ negativ, so werden auch die entsprechenden Werte T und t negativ. Man erhält also ebenso viele Gleichungen:

$$(D - S_{II})H = T \ldots\ldots \text{(Gleich. 45a) und}$$

$$(s_{II} - D)h = t \ldots\ldots\ldots \text{(Gleich. 45b),}$$

wie es Vergleichsreize gibt, die „größer“ bezw. „kleiner“ beurteilt worden sind. In Gleich. 45a kommen die Unbekannten S_{II} und H, in Gleich. 45b die Unbekannten s_{II} und h vor; sie müssen also aus sämtlichen vorliegenden Gleichungen mittels der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden. Dies ist hier aber nicht so einfach, wie es in Kap. 16 dargestellt wurde. Da die beiden Gleichungen, 45a und 45b, auf dieselbe Weise zu behandeln sind, beschränken wir uns darauf, das Verfahren beispielsweise an der ersteren nachzuweisen. Die Gleichung wird dann zuvörderst auf die Form $0 = -T - S_{II} \cdot H + D \cdot H$ gebracht, und setzt man hier $S_{II} \cdot H = x$, so hat man die Normalgleichung:

$$0 = -T - x + D \cdot H$$

wo x und H die beiden Unbekannten sind. Wenn diese gefunden sind, kann $S_{II} = x/H$ berechnet werden. Wollte man nun aber die Bedingungsgleichungen aus der Normalgleichung ableiten, wie die Gleich. 33 aus Gleich. 32 abgeleitet sind, so würde dadurch der Fehler entstehen, daß den Werten g/N ein um so größeres Gewicht beigelegt würde, je weiter sie von $\frac{1}{2}$ entfernt sind. Dies läßt sich dadurch vermeiden, daß die einzelnen Produkte der Bedingungsgleichungen mit einem Koeffizienten Γ multipliziert werden, welchen man der untenstehenden von Müller berechneten Tab. 21 entnimmt[1]). Die Bedingungsgleichungen erhalten also die Form:

$$0 = \quad [T \cdot \Gamma] + [\Gamma]x - [D \cdot \Gamma]H$$

$$0 = -[T \cdot D \cdot \Gamma] - [D \cdot \Gamma]x + [D^2 \cdot \Gamma]H.$$

Diese Gleichungen werden mit Bezug auf x und H gelöst.

In der Tab. 21 sind die Werte g/N resp. k/N kleiner als 0,5 und die entsprechenden Koeffizienten Γ nicht aufgeführt, weil die Abweichungen von 0,5 in entgegengesetzter Richtung denselben Wert Γ erfordern. Mit anderen Worten: g/N oder $k/N = 0{,}30$ entspricht derselbe Wert Γ, wie g/N oder $k/N = 0{,}70$.

---

[1]) Über die Maßbestimmungen des Ortsinnes. Pflügers Archiv, Bd. 19, S. 204.

Tabelle 21.

$\frac{g}{N}, \frac{k}{N}$	Γ	$\frac{g}{N}, \frac{k}{N}$	Γ	$\frac{g}{N}, \frac{k}{N}$	Γ
0,50	1,000	0,70	0,760	0,900	0,193
1	0,999	1	737	5	180
2	997	2	712	10	166
3	994	3	687	15	152
4	990	4	661	20	139
5	984	5	634	25	126
6	977	6	606	30	114
7	969	7	578	35	101
8	960	8	550	40	089
9	950	9	521	45	078
0,60	938	0,80	492	0,950	067
1	925	1	463	54	059
2	911	2	433	58	050
3	896	3	403	62	043
4	880	4	373	66	036
5	862	5	342	70	029
6	843	6	311	73	024
7	824	7	281	76	020
8	803	8	251	79	016
0,69	0,782	0,89	0,222	0,982	0,012

Wenn die Werte S_{II}, H, s_{II} und h gefunden sind, werden sie in die Gleich. 45 eingesetzt. Durch sukzessive Einsetzung der verschiedenen Werte D lassen sich danach die entsprechenden Größen T und t berechnen. Mittels Tab. 1 sucht man ferner die verschiedenen Werte:

$$\frac{2g}{N} - 1 = 2\,[W]_o^T \text{ und } -\left(\frac{2k}{N} - 1\right) = 2\,[W]_o^t$$

woraus man dann schließlich die Größen g/N und k/N berechnet. Stimmen diese berechneten Werte mit den durch die Versuche gefundenen überein, so war die Voraussetzung: die Gültigkeit des Fehlergesetzes, richtig, sonst aber nicht. Sind aber die gesuchten Größen S_{II}, H, s_{II} und h unter einer falschen Voraussetzung berechnet, so kann man selbstverständlich der ganzen Berechnung keinen Wert beilegen; das Resultat kann richtig oder falsch sein, je nach der Form der tatsächlichen Fehlerkurve. Erweist sich die Voraussetzung als falsch, so wird man zu der viel einfacheren Interpolationsmethode greifen müssen, um die Resultate zu kontrollieren. Damit kann man aber ebensogut den Anfang machen, denn auch in dem Falle, wo die Urteile sich nach dem Gaußschen Gesetze verteilen und die Müllerschen Formeln anwendbar sind, kommt man mittels Interpolation leichter und schneller zu ebenso genauen Resultaten.

24. *Die Komplikationsversuche.* Wenn eine stetige Vorstellungsreihe irgendeiner Art gegeben ist, kann die Aufgabe gestellt werden, zu beurteilen, mit welchem Glied der Reihe eine disparate Vorstellung zeitlich zusammentrifft. Die stetige Vorstellungsreihe wird am einfachsten durch Gesichtsbilder hergestellt, indem ein Zeiger sich über eine eingeteilte Scheibe entweder sprungweise oder mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, während die disparate Vorstellung entweder durch einen Schallreiz oder einen Hautreiz erregt wird. Es wird also die Aufgabe, zu bestimmen, in welcher Stellung sich der Zeiger befand, als der Schall gehört wurde. Erfahrungsmäßig zeigt es sich nun, daß diese Bestimmung nur ausnahmsweise richtig wird; gewöhnlich findet eine Zeitverschiebung statt, die entweder positiv oder negativ sein kann. Positiv nennt man die Verschiebung, wenn der Schall gleichzeitig mit einer späteren Zeigerstellung aufgefaßt wird, also gleichsam in der Bewegungsrichtung des Zeigers verschoben ist, negativ dagegen, wenn der Schall in der entgegengesetzten Richtung verlegt wird. Es hat sich ferner erwiesen, daß die Verschiebung in der Hauptsache von der Richtung der Aufmerksamkeit abhängig ist; jeder Reiz, auf welchen die Aufmerksamkeit gerichtet ist, wird schneller aufgefaßt als die gleichzeitigen Reize, die ohne Aufmerksamkeit perzipiert werden. Die Zeitverschiebung wird daher negativ, wenn die Aufmerksamkeit auf den Schall gerichtet ist, weil dieser dann relativ schnell zum Bewußtsein kommt und folglich als gleichzeitig mit einer früheren Zeigerstellung aufgefaßt wird. Umgekehrt wird die Zeitverschiebung positiv, wenn die Aufmerksamkeit auf die sukzessiven Zeigerstellungen gerichtet ist. Und in beiden Fällen erweist sich die Verschiebung als von der Rotationsgeschwindigkeit des Zeigers unabhängig, wenn die Richtung der Aufmerksamkeit willkürlich festgehalten wird. Wenn die Aufmerksamkeit dagegen nicht willkürlich gelenkt wird, hat es sich erwiesen, daß die Zeitverschiebung bei geringer Rotationsgeschwindigkeit negativ ist; mit wachsender Geschwindigkeit nimmt die Verschiebung allmählich ab, wird Null, um dann schließlich bei den größten Geschwindigkeiten positiv zu werden. Diese Tatsache läßt sich einfach dadurch erklären, daß die Aufmerksamkeit sich bei geringer Rotationsgeschwindigkeit vollständig dem zu erwartenden Schalle zukehren kann, während sie, höchst natürlich, um so mehr auf den rotierenden Zeiger gelenkt wird, je schneller die Be-

wegung wird. Diese Untersuchungen sind deshalb von besonderem Interesse, weil dadurch große individuelle Unterschiede ans Licht treten. Während die meisten Versuchspersonen die Aufmerksamkeit beliebig bald auf den einen bald auf den anderen Reiz lenken können, sind andere dagegen vollständig von der Rotationsgeschwindigkeit abhängig, so daß sie nur bei geringer Geschwindigkeit negative Verschiebungen erhalten; ausnahmsweise kommt es sogar vor, daß eine Versuchsperson sich gar nicht auf den Schall konzentrieren kann, solange sie den rotierenden Zeiger beobachtet [1]).

Wie zu erwarten stand, sind die durch derartige Untersuchungen gefundenen Werte recht schwankend, weil jede zufällige Ablenkung der Aufmerksamkeit ganz erhebliche Störungen herbeiführen kann. Hierzu trägt noch der von Geiger nachgewiesene Umstand bei, daß die Zeitverschiebung von der Stellung des Zeigers nicht unabhängig ist: wenn der Zeiger sich aufwärts bewegt, geht die Zeitverschiebung mehr in negativer Richtung, als wenn der Zeiger sich abwärts bewegt [2]). Mittelwerte aus einer geringen Anzahl Beobachtungen können daher keine zuverlässigen Resultate geben; es sind so viele Bestimmungen erforderlich, daß die Streuung der Werte berücksichtigt und das Dichtigkeitsmittel bestimmt werden kann. Verteilen sich die Werte aber über eine weite Strecke, so darf diese nur in relativ große Abschnitte geteilt werden, damit nicht gar zu wenige Einzelbeobachtungen in jeder Gruppe vorkommen. Dann wird es aber, jedenfalls dem Anschein nach, zweifelhaft, ob die Anzahl der jeder Gruppe angehörenden Werte einfach auf die Mitte der Gruppe bezogen werden darf. Es würde gewiß richtiger sein, die mittleren Werte der in jeder Gruppe liegenden Größen zu berechnen, und die Anzahl der Größen auf diese Mittelwerte zu beziehen. Da die berechneten Mittelwerte, welche die Abszissen der Streuungskurve bestimmen, aber nur ausnahmsweise äquidistant werden, ist die Kurve in diesem Falle mittels dividierter Differenzen auszugleichen. Dadurch wird die Ausgleichung eine sehr umständliche Arbeit, weil die Anwendung dividierter Differenzen bei stark schwankenden Werten die

[1]) Lehmann, Die körperlichen Äufserungen psychischer Zustände 2. Teil, S. 270—281. Die hier angegebenen Resultate sind später von Geiger (Neue Komplikationsversuche, in Phil. Stud. Bd. 18) bestätigt; er scheint aber meine Untersuchungen nicht zu kennen.

[2]) A. a. O. S. 387—395 und 418—436.

Berücksichtigung fast sämtlicher Differenzen höherer Ordnungen erfordert. damit sich keine sinnlosen Resultate ergeben. Man wird also dies Verfahren möglichst vermeiden, und glücklicherweise zeigt es sich denn auch erfahrungsmäßig, daß es. sobald die Kurve ausgeglichen werden muß, eigentlich ohne Bedeutung ist, ob die Anzahl der Werte in jeder Gruppe auf die Mitte der Gruppe oder auf die Mittelwerte derselben bezogen wird. Der hierdurch bedingte Unterschied verschwindet vollständig im Vergleich mit den weit größeren Veränderungen der Ausgleichung, was sich am besten durch ein Beispiel nachweisen läßt.

Bei einer Untersuchung der erwähnten Art wurden von einer Versuchsperson 30 Bestimmungen der Zeitverschiebung gemacht. Die Aufmerksamkeit war willkürlich auf den Zeiger gerichtet, und die Verschiebung folglich positiv, was jedoch das Vorkommen einzelner negativen Werte nicht ausschliefst. In Tab. 22 sind

Tabelle 22.

Zwischen	liegen die Werte:		M	y	x	$((y))$
— 150 u. — 101	— 147,5		— 147,5	1	— 125	— 0,2
— 100 u. — 51				0	— 75	0,5
— 50 u. — 1	— 33,3		— 33,3	1	— 25	0,7
0 u. 49	0	0	0	2	25	2,5
50 u. 99	59	98,3 98,3	85,2	3	75	3,5
100 u. 149	100	100 100 102,8 116,7 147,5	111,2	6	125	4,6
150 u. 199	163	168 187	172,7	3	175	5,0
200 u. 249	224	233 233 233 246 246 246	237,3	7	225	4,7
250 u. 299	252	271	261,5	2	275	3,8
300 u. 349	300	315 317 333	316,3	4	325	2,3
350 u. 399				0	375	1,0
400 u. 449	417		417	1	425	0,1

sämtliche 30 Werte, in Tausendsteln Sekunden ausgedrückt und in gleich grofse Gruppen geordnet, aufgeführt. Ferner sind unter M die Mittelwerte der in jeder Gruppe vorkommenden Gröfsen, unter y die Anzahl dieser Gröfsen und unter x die Mitte jeder Gruppe angegeben. Die Mittelwerte M weichen durchgängig so wenig von x ab, dafs der Unterschied die Form der Streuungskurve kaum beeinflussen kann, was am besten aus Fig. 11 ersichtlich ist. Wenn die Werte x als Abszissen, y als Ordinaten abgesetzt werden, erhält man die durch die punktierten Linien bezeichnete Verteilung; werden dagegen M als Abszissen abgesetzt, kommt man zu den mit kleinen Zirkeln bezeichneten Punkten. Geht man von den äquidistanten Argumenten x aus, so führt die Ausgleichung der Werte y zu den in Tab. 22 unter $((y))$ angegebenen Gröfsen; diese bestimmen die vollgezeichnete Kurve der Fig. 11. Es ist leicht ersichtlich, dafs es nur ganz geringfügige Veränderungen der Form

und der Lage dieser Kurve hätte herbeiführen können, wenn man von den nicht äquidistanten Argumenten M ausgegangen wäre, und die dadurch erreichte gröfsere Genauigkeit würde eine recht illusorische sein, da die ausgeglichene Kurve stets nur die wahrscheinliche Streuung der Werte geben kann. Man wird also gewöhnlich ohne Nachteil die Häufigkeitszahlen auf die Mitte der Gruppen beziehen können, selbst wenn die in jeder Gruppe liegende Anzahl Werte nur relativ klein ist.

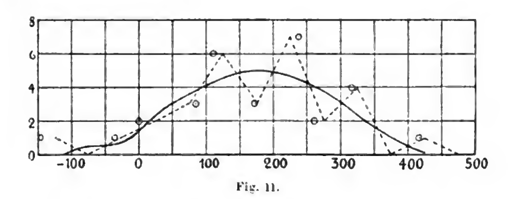


Fig. 11.

25. *Assoziationsmessungen.* Durch das oben (Kap. 17 S. 72) besprochene Ersparnisverfahren wird die Arbeit bestimmt, die erforderlich ist, um eine früher erlernte Reihe zu irgendeinem späteren Zeitpunkte fehlerfrei zu reproduzieren. Es gibt aber wenigstens noch drei andere Methoden, wodurch die Festigkeit einer Assoziation zu einem beliebigen späteren Zeitpunkte untersucht werden kann, und diese Methoden haben vor dem Ersparnisverfahren den Vorzug, daß man mittels derselben Aufschlüsse über den Zustand der einzelnen Glieder der Assoziation erhält. Den drei Methoden ist es gemeinsam, daß einzelne Glieder der Reihe als Reize wirken, und das Urteil der Versuchsperson wird in der Form abgegeben, daß das folgende Glied reproduziert bzw. nicht reproduziert wird. Wir bezeichnen die drei verschiedenen Verfahren als „die Treffermethode“, „die Methode der Hilfen“ und „die Methode der Ordnung“.

Die Treffermethode ist von Müller und Pilzecker angegeben. Um die Festigkeit einer Assoziation zu prüfen, „können wir in der Weise vorgehen, daß wir die betonten Silben jeder von der Versuchsperson (in trochäischem Takte) gelesenen Silbenreihe nach Verlauf einer bestimmten Zeit, z. B. von 24 Stunden, der Versuchsperson in geeigneter Reihenfolge vorzeigen (oder mündlich angeben) mit der Aufforderung, zu jeder vorgezeigten Silbe die zugehörige unbetonte Silbe, welche ihr in der gelesenen Silbenreihe unmittelbar

gefolgt sei, zu nennen" [1]). Auf diese Weise läßt sich also feststellen, wie viele Silbenpaare nach einer gewissen Zeit noch behalten werden. Aus einem größeren Versuchsmaterial ist außerdem ersichtlich, wie sich die behaltenen Silbenpaare, „die Treffer", über die Silbenreihe verteilen, indem man die Prozentzahl der Treffer für das erste, zweite, dritte usw. Silbenpaar getrennt berechnet. Ein Übelstand ist es hier allerdings, daß nur die geraden Silben reproduziert werden, während die ungeraden als Reize dienen; es wird also nur die Festigkeit der Assoziation je zweier Glieder bestimmt. Diesen Nachteil hat man bei der Methode der Hilfen vermieden.

Die Methode der Hilfen, von Ebbinghaus angegeben, bildet gewissermaßen das Negativ zu der Treffermethode. „Man läßt die Versuchsperson die vorher bis zu einem gewissen Grade eingeprägte Reihe reproduzieren, hilft ihr an den Stellen, wo sie stockt oder Fehler macht, durch sofortiges Nennen des richtigen Gliedes ein und zählt dann die erforderlich gewesenen Hilfen [2])." Bei dieser Methode kann man die Verteilung der Hilfen für jedes Glied der Reihe feststellen; die Methode wird aber nur anwendbar, wenn die Prüfung wenige Minuten nach dem Erlernen unternommen wird. Die Reihe kann ja nämlich gar nicht reproduziert werden, wenn das Anfangsglied vergessen ist; das erste Glied hat also sofort Hilfe nötig, weshalb dasselbe den anderen gegenüber besonders ungünstig gestellt ist. Man würde daher kaum zu richtigen Resultaten gelangen, wenn man mittels dieser Methode z. B. untersuchen wollte, in welcher Ordnung die einzelnen Glieder einer Assoziation sich lockern, wenn die einmal gestiftete Assoziation kürzere oder längere Zeit sich selbst überlassen bleibt. Dies kann dagegen sehr leicht nach der dritten Methode bestimmt werden.

Die Methode der Ordnung. Um sämtliche Glieder einer erlernten oder wenigstens einigemal gelesenen Reihe sozusagen auf gleichen Fuß zu stellen, kann man sie samt und sonders der Versuchsperson in beliebiger Ordnung vorlegen mit der Aufforderung, die Glieder so zu ordnen, daß die gelesene Reihe hergestellt wird. Die einzelnen Silben können z. B. einfach auf Papierschnitzel geschrieben sein, die der Versuchsperson in einem Haufen vorgelegt werden, und es wird ihre

[1]) Müller u. Pilzecker, Experimentelle Beiträge zur Lehre vom Gedächtnis. Leipzig 1900. S. 1—2.

[2]) Ebbinghaus: Psychologie. Leipzig 1902. S. 620.

Aufgabe, die Silben zu ordnen. Jedes Glied, das sich an seinem rechten Platze befindet, wenn die Ordnung beendigt ist, wird dann als ein Treffer gerechnet. Es ist kaum nötig zu bemerken, daß die Methode unmittelbar darüber Aufschluß gewährt, wo die Festigkeit der Assoziation am größten ist, und wo die Lockerung am langsamsten stattfindet. Ein Beispiel wird die Sache erläutern.

An sechs aufeinander folgenden Tagen wurden jeden Tag vier 16silbige Reihen in konstantem Takte bis zur fehlerfreien Reproduktion gelesen. Von den vier Reihen wurden jedesmal zwei 5 Min., die beiden anderen 20 Min. nach dem Erlernen mittels der Ordnungsmethode geprüft; das Resultat geht aus der Tab. 23 hervor. In der Reihe „No." sind die

Tabelle 23.

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5 Min.	83	100	92	92	75	33	58	42	50	42	42	50	58	75	83	75
20 Min.	75	75	42	33	33	42	25	17	25	17	17	33	50	42	58	83

Ordnungszahlen der Reihenglieder, in den Reihen „5 Min." und „20 Min." die nach diesen Intervallen für jedes Glied der Reihe gefundene Prozentzahl richtiger Fälle angeführt. Man ersieht sofort aus der Tabelle, daß die Lockerung der Assoziationen um die Mitte am größten ist und von hier aus gegen beide Enden abnimmt; außerdem nimmt die Lockerung, mit wachsendem Intervalle, in der Mitte bedeutend stärker zu als an den Enden der Reihe. Dies stimmt vollständig mit den Untersuchungen Ebbinghaus', nach welchen die Festigkeit einer eben reproduzierbaren Assoziation in der Mittte am geringsten ist; folglich wird auch die Lockerung derselben hier zuerst merklich.

Es ist schon längst experimentell dargetan und auch theoretisch leicht erklärlich, daß mittels des Ersparnisverfahrens nicht dasselbe gemessen wird wie mittels der Treffermethode und der Methode der Hilfen[1]. Die Resultate der beiden letzteren Methoden sind in weit höherem Grade davon abhängig, ob die durch das Erlernen erregten zentralen Vorgänge noch fortdauern, oder ob sie schon abgeklungen sind. Die Ordnungsmethode nimmt in dieser Beziehung eine mittlere

[1] Psychodynamik S. 293—295, 317—319.

Stellung ein. Die Resultate derselben sind relativ unabhängig von der Fortdauer der zentralen Vorgänge, was denn auch leicht verständlich ist, weil diese Vorgänge wieder erregt werden, indem sämtliche Reihenglieder der Versuchsperson zu Gesichte kommen. Kombiniert man diese Methode mit der Treffermethode, was leicht tunlich ist, wenn die Reihe zuerst mit Bezug auf die Treffer und dann auf die Ordnung geprüft wird, so findet man, daß die Anzahl der Treffer mit wachsendem Zeitintervalle viel schneller abnimmt als die Anzahl der richtig geordneten Glieder. Anderseits zeigt es sich, daß die Anzahl der richtig geordneten Glieder durchaus nicht von der Fortdauer der zentralen Nachbilder unabhängig ist. Stört man dieselben, ehe die Prüfung stattgefunden hat, z. B. dadurch, daß eine neue Reihe gelernt wird, so geht die Anzahl der richtigen Fälle bedeutend herab. In dem oben angeführten Beispiel wurden im ganzen nach 5 Min. 65,6 %, nach 20 Min. 41,7 % richtiger Fälle erhalten. Letztere Zahl kam aber bei zwei wesentlich verschiedenen Versuchsanordnungen heraus. In der Hälfte der Fälle beschäftigte sich die Versuchsperson während der Zeit zwischen dem Erlernen und der Prüfung ausschließlich mit andersartigen Arbeiten (Zeichnen), die zwar die Aufmerksamkeit völlig in Anspruch nahmen, aber die Perseverationstendenz doch nicht direkt zu stören vermochten. In der anderen Hälfte der Versuche wurde außerdem 12 Min. nach dem Erlernen der zu prüfenden Reihe eine neue Reihe auswendig gelernt. Daß hierdurch eine Störung des zentralen Nachbildes stattfindet, geht daraus hervor, daß die ungestörten Reihen 49,0 %, die gestörten dagegen nur 34,5 % richtiger Fälle ergaben.

Selbstverständlich kommt es bei der Anwendung der Ordnungsmethode zuweilen vor, daß zwei Glieder richtig nebeneinander gestellt, dagegen aber an einem falschen Platze in der Reihe eingesetzt werden. Solche Fälle habe ich oben als nicht richtig gerechnet; da sie aber unzweifelhafte „Treffer“ sind und folglich auch von der Festigkeit der Assoziation zeugen, können sie auch in dieser Beziehung verwertet werden. Dadurch geht die Ordnungsmethode in eine „Treffermethode mit gegebenen Reihengliedern“ über. Letztere unterscheidet sich von der ersteren nur durch die Berechnungsweise. Wenn die Reihe von der Versuchsperson hergestellt ist, zählt man die tatsächlich vorliegenden Treffer ohne Rücksicht auf die ihnen angewiesenen Plätze in der Reihe. Unter den beiden folgenden Zahlenreihen:

A	1 2 3	4 5	6 7 8 9	10 11	12	13	14	15 16
B	1–2–3	8–9	4–5–6–7	11–12	10	14	13	15–16

bedeutet *A* die ursprüngliche, gelernte Reihe, *B* die von der Versuchsperson hergestellte Reihe. Während die beiden Reihen nur fünf vollständige Übereinstimmungen, mithin also 31 % richtige Fälle, zeigen, sind dagegen unter den 15 möglichen Treffern 8 oder 53 % faktisch angegeben. Auf diese Weise berechnet wird die Festigkeit der Assoziation wahrscheinlich ebenso unabhängig von dem zentralen Nachbilde wie bei der Ersparnismethode bestimmt; es liegen indes noch keine näheren Untersuchungen hierüber vor.

C. Die Ausdruckmethoden.

26. *Messung der Zeitdauer psychischer Vorgänge.* Da wir vorläufig außerstande sind, den Anfang und den Abschluß eines zentralen Vorganges direkt zu bestimmen, läßt sich die Dauer eines solchen Prozesses nur auf die Weise feststellen, daß die Zeit vom Anfang der Reize an bis zu dem Momente, wo die Versuchsperson durch eine willkürliche Bewegung die Beendigung signalisiert, gemessen wird. Die Zeit wird gewöhnlich in Tausendstel Sekunden, durch σ bezeichnet, angegeben. Wie leicht verständlich sind die Messungen mit oft erheblichen, teils von physikalischen, teils von psychophysiologischen Ursachen herrührenden Fehlern behaftet und müssen daher, um die Elimination der Fehler zu ermöglichen, häufig wiederholt werden. Bisher war es allgemein üblich, aus den Einzelmessungen nur den Mittelwert und den durchschnittlichen Fehler zu berechnen, während auf die Streuung der Fehler gar keine Rücksicht genommen wurde. Folglich blieb es ganz unentschieden, ob die mittleren Werte überhaupt eine Bedeutung beanspruchen konnten. Durch die Untersuchungen von Alechsieff [1]) und Bergemann [2]) wurde es in der Tat dargelegt, daß die Verhältnisse, sogar bei den einfacheren psychologischen Zeitmessungen, so kompliziert sein können, daß sie durch die Mittelwerte der Messungen gar keinen erschöpfenden Ausdruck erhalten. Die Streuungskurven der Werte müssen stets berücksichtigt werden, weil die Kurven oft mehrere Maxima zeigen, was auf eine Interferenz verschiedener Ursachen deutet.

[1]) Reaktionszeiten bei Durchgangsbeobachtungen. Phil. Stud. Bd. 16.

[2]) Reaktionen auf Schalleindrücke, nach der Methode der Häufigkeitskurven bearbeitet. Wundt: Psych. Stud., B. 1. 1905.

Die erste Frage wird nun, wie diese Streuungskurven am richtigsten herzustellen sind.

Im vorhergehenden haben wir mehrmals Streuungskurven auf die Weise konstruiert, daß wir die Werte innerhalb bestimmter, äquidistanter Grenzen aufzählten und als Ordinaten in der Mitte der betreffenden Gruppen absetzten (Kap. 14 und 24). Indem wir ferner von der Voraussetzung ausgingen, daß die Kurve nur einen Maximumpunkt haben könne, wurde sie so weit ausgeglichen, daß die Bestimmung des Dichtigkeitsmittels möglich wurde. Willkürlich war bei dem ganzen Verfahren nur die Wahl der Größe der Gruppen, die jedoch fast immer durch die vorliegenden Umstände angezeigt war. Werden die Gruppen zu klein genommen, so liegen in jeder Gruppe zu wenige Werte, und der Gipfel der Kurve tritt nicht deutlich hervor; werden die Gruppen dagegen zu groß genommen, so erhält man eine gar zu geringe Anzahl Ordinatenwerte, um die Kurve bestimmen zu können. Die Wahl der Gruppenlänge wird daher, wenn eine beschränkte Anzahl Messungen vorliegt, ohne Schwierigkeit durch diese Anzahl entschieden. In betreff der Zeitmessungen stellt sich die Sache gewöhnlich anders. Erstens beanspruchen diese Messungen eine so geringe Zeit, daß man fast immer über eine größere Anzahl Einzelmessungen verfügen kann, und zweitens darf die Ausgleichung hier nicht immer so weit geführt werden, daß die Streuungskurve nur einen Maximumpunkt zeigt, weil oft mehrere ausgesprochene Maxima von unzweifelhafter Bedeutung in der rohen Kurve hervortreten. Dadurch wird die Wahl der Gruppenlänge schwierig, denn je größer man die Gruppen macht, um so mehr verschwinden alle Unebenheiten der Kurve, und es fragt sich also, wie man die zufälligen Schwankungen der Kurve beseitigen kann, ohne gleichzeitig bedeutungsvolle Gipfel auszugleichen.

Wie die Größe der Gruppen für die Form der Kurve von entscheidender Bedeutung wird, ist am besten aus einem Beispiel zu ersehen, das ich der oben zitierten Arbeit Bergemanns entlehne[1]). In Fig. 12 sind als Abszisse die gemessenen Zeiten, als Ordinate die Häufigkeit der einzelnen, gemessenen Werte abgesetzt. Die äußerst zackige Linie, Fig. 12 A, erhält man, wenn die Gruppenlänge gleich 1^{σ} genommen wird; addiert man dagegen die Häufigkeitszahlen von je fünf dieser Gruppen,

[1]) A. a. O. S. 188—189.

wodurch die Gruppenlänge also gleich 5° wird, so resultiert die ziemlich regelmäßige Linie der Fig. 12 B. Zwischen diesen Extremen nimmt die stark gezeichnete Kurve der Fig. 12 A, die noch zahlreiche partielle Maxima und Minima aufweist, eine mittlere Stellung ein. Diese Kurve ist durch Ausgleichung der Häufigkeitszahlen, die 1° Gruppenlänge entsprechen, mittels Differenzen erster Ordnung (vgl. Kap. 12 Gleich. 25) erschienen. Selbstverständlich können auch die Ordinaten der Fig. 12 B ausgeglichen werden, wodurch eine noch glattere und regelmäßigere Streuungskurve entsteht. Man kann mit

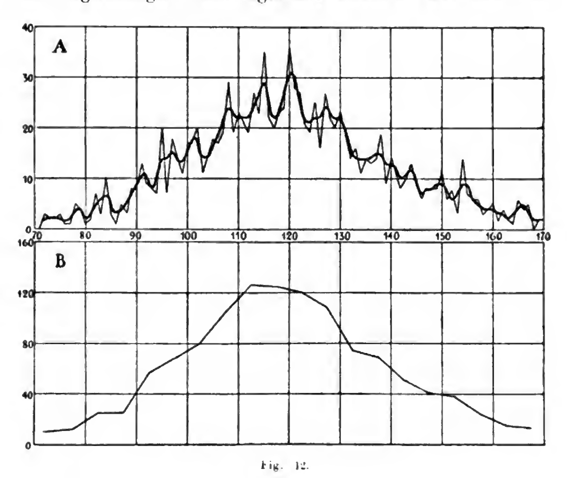


Fig. 12.

andern Worten durch die Wahl der Gruppenlänge und eine stärkere oder schwächere Ausgleichung der Kurve die partiellen Maxima und Minima nach Belieben bis zum vollständigen Verschwinden unterdrücken. Welches Verfahren ist hier das richtigste?

Die Beantwortung dieser Frage kann nicht schwierig sein. Bei jeder Untersuchung eines neuen Gebietes muß man selbstverständlich damit anfangen, die Hauptgesetze nachzuweisen, was einfach auf die Weise geschieht, daß kleinere Abweichungen von einer augenfälligen Gesetzmäßigkeit vorläufig ignoriert,

als nicht existierend betrachtet werden. Ist dann die durchgängige Gültigkeit des Hauptgesetzes dargetan, so kann man dazu übergehen, den Ursachen und den Gesetzen der Abweichungen nachzuspüren. Es gibt überhaupt keinen anderen Weg des Fortschrittes; ein klassisches Beispiel dieser Art bieten uns die Keplerschen Gesetze. Kepler konnte die drei Hauptgesetze der Planetenbewegungen nur auf die Weise feststellen, daß er alle Abweichungen als Beobachtungsfehler betrachtete. Erst nachdem sich die drei Keplerschen Gesetze als einfache Folgen des Gravitationgesetzes erwiesen hatten, ließ sich eine Berechnung der Abweichungen, der Perturbationen, unternehmen. An dem Weberschen Gesetze haben wir ein anderes, uns näher liegendes Beispiel. Hätte Weber unter Berücksichtigung der Raum- und Zeitlagen seine Messungen mit der Genauigkeit angestellt, die heutzutage gefordert wird, würde er wahrscheinlich nie das konstante Verhältnis der Reize entdeckt haben. Sobald Fechner die Messungen mit größerer Genauigkeit wiederholte, traten die Abweichungen hervor, und das logarithmische Verhältnis zwischen Empfindung und Reize als psychophysisches Grundgesetz konnte Fechner nur behaupten, indem er von den Abweichungen als unwesentlichen Perturbationen abstrahierte. Die weitere Erklärung dieser Perturbationen durch Hemmung und Bahnung der gleichzeitigen und sukzessiven Empfindungen wurde aber erst möglich, weil man darauf die Gültigkeit des Grundgesetzes als dargetan voraussetzen konnte.

Wenden wir diese Betrachtungen auf das vorliegende Problem an, so ergibt sich die einfache, praktische Regel, daß wir damit anfangen müssen, die Kurven so weit auszugleichen, daß nur noch die Hauptgipfel hervortreten. Wie die Ausgleichung durchgeführt wird, ist an und für sich unwesentlich. Man kann sie, wie Alechsieff und Bergemann es taten, einfach durch eine passende Wahl der Gruppenlänge zustande bringen, indem diese Größe mit Rückblick auf die vorliegende Anzahl der Messungen bestimmt wird. Dann wird es aber auch notwendig, je nach der gewünschten Ausgleichung, die Gruppenlänge zu ändern. Übersichtlicher und bequemer ist es daher, die Gruppenlänge konstant zu halten und so klein zu wählen, daß noch mehrere Maxima und Minima hervortreten; die erforderliche Ausgleichung wird dann nach Gleich. 25 ausgeführt, wodurch die unwesentlichen Maxima zurücktreten, während nur die Hauptgipfel übrig bleiben. Ist es durch vergleichende

Untersuchungen erst gelungen, die Bedeutung dieser Hauptpunkte festzustellen, so kann man später eine weniger starke Ausgleichung anwenden, um womöglich auch der Bedeutung der partiellen Maxima nachzuspüren. Da man aber, wie wir sahen, ganz nach Belieben mehr oder weniger Maxima hervortreten lassen kann, so leuchtet es unmittelbar ein, daß nur solche Kurven miteinander verglichen werden dürfen, die ungefähr dieselbe Anzahl Messungen umfassen und gleich stark ausgeglichen sind.

Um die Komplikation der psychischen Vorgänge mittels der Zeitmessungen zu untersuchen, muß man damit anfangen, die „einfache Reaktionszeit", d. h. die Zeit vom Anfang einer einfachen Sinnesreizung bis zur Ausführung der möglichst einfachen Muskelbewegung, zu bestimmen. Seit den Untersuchungen L. Langes wissen wir, daß diese einfache Reaktionszeit keine konstante Größe ist; sie schwankt vielmehr zwischen zwei Extremen, die die sensorielle und die muskuläre Reaktionszeit genannt werden [1]). Erstere erhält man, wenn die Aufmerksamkeit ausschließlich auf den zu erwartenden Reiz, letztere dagegen, wenn die Aufmerksamkeit auf die Muskelbewegung, die Reaktion, gerichtet ist. Wird die Aufmerksamkeit dagegen nicht willkürlich in einer bestimmten Richtung gelenkt, so erhält man die sogenannten „natürlichen" Reaktionszeiten, die zwischen der sensoriellen als dem oberen und der muskulären Reaktionszeit als dem unteren Grenzwerte liegen. Diese ursprünglich nur aus den mittleren Werten der Messungen festgestellten Resultate sind später, in den oben zitierten Arbeiten, nach der Methode der Häufigkeitskurven näher untersucht worden. Aus diesen Kontrollarbeiten geht hervor, daß den mittleren Werten der Messungen nur ausnahmsweise eine Bedeutung beigelegt werden darf. Rein sensorielle oder rein muskuläre Reaktionen sind nämlich erst dann zu erzielen, wenn die Versuchsperson durch Hunderte von Versuchen die besondere Reaktionsweise eingeübt hat. Bei geringerer Übung treten in den Kurven stets zwei Maxima hervor, welche eben den Zeiten entsprechen, die sich bei größerer Übung als die sensorielle und die muskuläre Reaktionszeit erweisen. Hierdurch wird die genaue Bestimmung dieser extremen Zeiten mittels der Häufigkeitskurven sehr vereinfacht, indem es gar

---

[1]) Neue Experimente über den Vorgang der einfachen Reaktion auf Sinneseindrücke. Phil. Stud. Bd. 4, S. 479 u. f.

nicht nötig wird, die beiden Reaktionsweisen vollständig einzuüben. Bestrebt sich die Versuchsperson in einer Versuchsreihe sensoriell, in einer anderen dagegen muskulär zu reagieren, so sind, trotz allen Schwankungen, aus den Maximis der Häufigkeitskurven die extremen Reaktionszeiten zu ersehen. Auch in den Kurven der natürlichen Reaktionen findet man fast immer partielle Maxima bei den extremen Reaktionszeiten nebst einem größeren und ausgedehnteren Maximum zwischen diesen Grenzwerten. Daß die partiellen Maxima hier wirklich den extremen Reaktionszeiten entsprechen, läßt sich aber selbstverständlich nur durch eine besondere Untersuchung feststellen.

Aus diesen Tatsachen geht nun zuvörderst hervor, daß alle bisher vorliegenden Bestimmungen zusammengesetzter Reaktionen zweifelhaft werden, weil die Resultate nur durch die Mittelwerte der Messungen gegeben sind. Wir wissen also gar nicht, ob irgendeine zusammengesetzte Reaktion wirklich eine konstante, einheitliche Reaktionsform darstellt, oder ob nicht vielmehr eine Interferenz verschiedener Reaktionsweisen stattfindet. Die sogenannten Erkennungs-, Unterscheidungs- und Wahlzeiten, die man erhält, wenn man die einfache Reaktionszeit von den Zeiten der zusammengesetzten Reaktionen subtrahiert, würden im letzteren Falle jede Bedeutung verlieren, weil sie nicht die Dauer bestimmter psychischer Vorgänge ausdrückten, sondern sich nur auf Mischungen verschiedenartiger Vorgänge bezögen. Daß es sich in der Tat so verhält, scheint aus einer Untersuchung in dem Nachlasse des verstorbenen Dr. Buch hervorzugehen. Dr. Buch, der sich an den Durchgangsbeobachtungen Alechsieffs beteiligt hatte, stellte die betreffende Untersuchung im Frühjahr 1902 mit verschiedenen Versuchspersonen an; hier gebe ich nur die persönlichen Resultate Dr. Buchs als ein Beispiel wieder, wie derartige vergleichende Untersuchungen ausgeführt werden können.

Zur Zeitmessung diente ein Hippsches Chronoskop, das mittels eines Kontrollhammers häufig geprüft wurde. Die Objekte waren teils farbige Quadrate (rot, gelb, blau) auf grauem Hintergrunde, teils Buchstaben (*X*, *H* und *V*); mit diesen Objekten wurden die folgenden vierzehn Reihen von Versuchen ausgeführt.

1. 50 Messungen der einfachen, natürlichen Reaktionszeit. Objekt: rotes Quadrat.

2. 50 Messungen der Unterscheidungszeit. Die Objekte waren ein gelbes und ein blaues Quadrat, mit welchen, der Versuchsperson unwissentlich, unregelmäßig gewechselt wurde; reagiert wurde stets mit der rechten Hand, wenn die Farbe wiedererkannt war.
3. 50 Messungen der Unterscheidungszeit. Die Objekte waren die Buchstaben *H* und *V*; übrigens genau wie Gruppe 2.
4. 50 Messungen der Wahlzeit. Objekte: gelbes und blaues Quadrat, mit welchen, der Versuchsperson unwissentlich, gewechselt wurde. Auf gelb wurde mit der rechten, auf blau mit der linken Hand reagiert; die selten vorkommenden falschen Reaktionen sind nicht mitgerechnet.
5. 50 Messungen der Wahlzeit. Objekte waren die Buchstaben *H* und *V*. Auf *H* (dänisch: höjre = rechts) wurde mit der rechten, auf *V* (dänisch: venstre = links) mit der linken Hand reagiert; übrigens wie Gruppe 4.
6. 50 Messungen der Wahlzeit. Die Objekte waren rotes, gelbes und blaues Quadrat in unregelmäßiger Reihenfolge. Auf gelb wurde mit der rechten, auf blau mit der linken Hand und auf rot mit beiden Händen reagiert. Die falschen Reaktionen sind nicht mitgerechnet.
7. 50 Messungen der Wahlzeit. Objekte: *H*, *V* und *X*. Auf *H* wurde mit der rechten, auf *V* mit der linken Hand und auf *X* mit beiden Händen reagiert; übrigens wie bei Gruppe 6.

8—14. Wiederholung der sieben Versuchsreihen in umgekehrter Reihenfolge; 50 Messungen jeder Art.

Es liegen also im ganzen 100 Messungen jeder Art vor. Um die Häufigkeitskurven zu konstruieren, war es notwendig, wegen der geringen Anzahl der Einzelbestimmungen die Gruppenlänge = 10σ zu setzen. Dies genügte übrigens nicht hinsichtlich der Versuchsreihen 6 + 9 und 7 + 8, weil die Streuung der Werte hier eine sehr große war. Da sich aber kaum ein Unterschied zwischen diesen Reihen nachweisen ließ, habe ich die Werte aller vier Reihen zusammengerechnet, so daß die betreffende Kurve also 200 Messungen umfaßte. Die auf diese Weise erhaltenen Kurven sind in Fig. 13 dargestellt, wo die Abszissen Tausendstel Sekunden, die Ordinaten die Anzahl der Einzelmessungen in jeder Gruppe sind. Die zackigen Linien geben hier die Resultate der unmittelbaren Aufzählung an, während die stark gezeichneten Kurven durch einmalige Ausgleichung der Werte, nach Gleich. 25, entstanden. Es bedeutet übrigens *R* die einfache Reaktionszeit — die Versuchs-

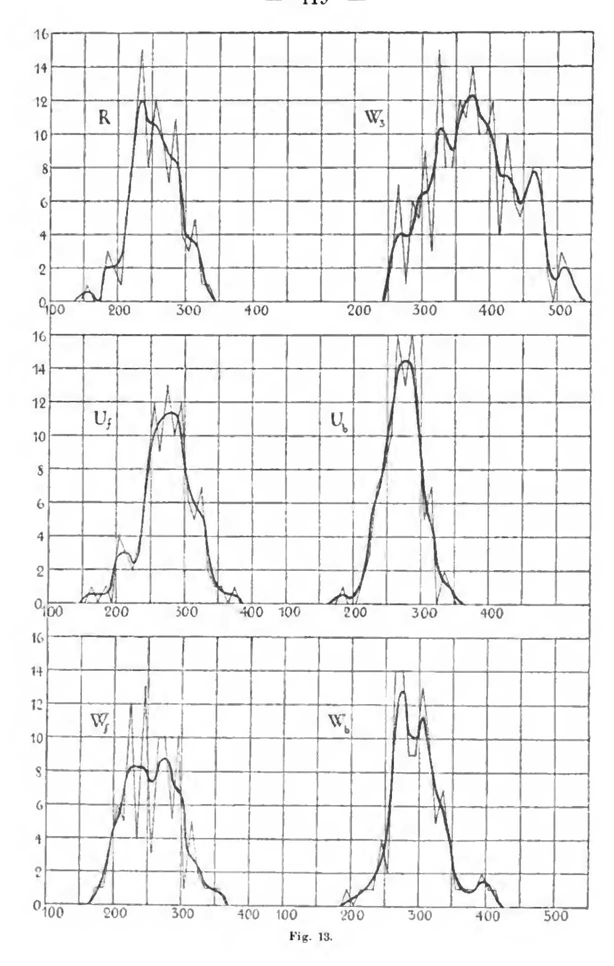


Fig. 13.

reihen 1 + 14; U_f die Unterscheidungszeit für Farben — Reihe 2 + 13; U_b die Unterscheidungszeit für Buchstaben — Reihe 3 + 12; W_f die Wahlzeit für Farben — Reihe 4 + 11; W_b die Wahlzeit für Buchstaben — Reihe 5 + 10; W_3 die Wahlzeit für drei verschiedene Objekte — die Reihen 6 + 7 + 8 + 9.

Vergleichen wir die sechs Kurven, so gehen die folgenden interessanten Resultate hervor. Aus der R-Kurve ist ersichtlich, daß die große Mehrzahl der Messungen zwischen den Grenzen $R_m = 235^\sigma$ und $R_s = 285^\sigma$ liegt. Diese beiden Zeiten sind wahrscheinlich die muskuläre, bezw. die sensorielle Reaktionszeit; ganz entschieden ist dies zwar nicht, weil nicht besonders darauf abgezielt wurde, muskuläre und sensorielle Reaktionen zustande zu bringen, für unsere folgenden Betrachtungen ist dies aber ohne Bedeutung. Aus den U_f- und U_b-Kurven ersieht man ferner, daß die Maxima der ausgeglichenen Kurven genau an der nämlichen Stelle liegen: $U_f = 280^\sigma$ und $U_b = 275^\sigma$. Diese Zeiten fallen also einfach mit der sensoriellen Reaktionszeit, $R_s = 285^\sigma$, zusammen. Hätte man dagegen die Mittelwerte der Messungen in Betracht gezogen, so würde man zu ganz anderen Resultaten gekommen sein. Für die einfache Reaktion findet man als mittleren Wert $R_e = 254^\sigma$; die Unterscheidung für Farben ergibt $R_u = 276^\sigma$, und für Buchstaben $R_u = 272^\sigma$. Zieht man die einfache Reaktionszeit von diesen Größen ab, so findet man also als Unterscheidungszeit 18 bis 22^σ. Es ist aber leicht verständlich, daß dies Resultat ganz illusorisch ist; Bedeutung würde dieses nur haben, wenn die einfache Reaktionszeit die Dauer einer Reaktion ohne Unterscheidung wäre, was tatsächlich nicht der Fall ist — der mittlere Wert der Messungen der einfachen Reaktionszeit ist überhaupt keine eindeutige Größe.

Die ausgeglichenen Kurven der Wahlreaktionen haben zwei Maxima, deren eines den beiden Kurven gemeinsam ist, nämlich 275^σ. Dies Maximum entspricht also wieder der sensoriellen Reaktionszeit, was mit anderen Worten nur heißt, daß diese Wahlreaktion ein zentraler Reflex ist. Von den beiden nicht übereinstimmenden Maximis der beiden Kurven ist dasjenige der W_f-Kurve am merkwürdigsten; es entspricht einer Reaktionszeit von 235^σ, also genau der muskulären Reaktionszeit. Dies ist wohl nur so zu deuten, daß die richtige Reaktion sich reflektorisch auslöst, ehe der Eindruck vollständig apperzipiert worden ist. Von dieser Reaktionsart findet sich in der W_b-Kurve kaum eine Spur; das zweite

Maximum liegt hier bei 305σ. Ein besonderer Vorgang scheint sich also hier zwischen die Auffassung des Reizes und die Innervation des Muskels einzuschalten; wahrscheinlich reproduzieren die Buchstaben *H* bezw. *V* erst die Worte „höjre" (rechts) bezw. „venstre" (links), und darauf tritt die Reaktion ein. Ob diese Erklärung richtig ist, läßt sich nur durch Selbstbeobachtung entscheiden; Dr. Buch hat aber leider keine Bemerkung hierüber gemacht.

Betrachten wir schließlich die kompliziertere Wahlreaktion, W_3, wo auf drei verschiedene Reize verschieden reagiert wird, so zeigt sich dieselbe äußerst verwickelt. Es finden sich Andeutungen von Maximis bei 275σ und 305σ, welche Zeiten also mit den schon betrachteten übereinstimmen. Das Hauptmaximum liegt aber bei 375σ, und außerdem kommen zwei nicht unerhebliche Maxima bei 330σ resp. 465σ vor. Die Bedeutung dieser verschiedenen Zeiten ist noch vollständig unbekannt. So viel geht jedenfalls aus dem hier betrachteten Beispiele hervor, daß eine Durchforschung des ganzen Gebietes nach der Methode der Häufigkeitskurven dringend erforderlich ist.

27. *Energiemessungen.* Als Energiemessungen bezeichne ich alle diejenigen Bestimmungen, welche bezwecken, mittels der Hemmung, die von verschiedenen zentralen Vorgängen auf eine bestimmte Tätigkeit ausgeübt wird, ein relatives Maß dieser Vorgänge abzuleiten. Es liegen bisher nur drei Untersuchungen dieser Art vor[1]), und die Methode ist folglich so wenig durchgearbeitet, daß sehr viele ihre Anwendung betreffende Fragen noch gar keine Beantwortung finden können. Anderseits ist diese Methode aber, vorläufig wenigstens, die einzige, die uns über die quantitativen Verhältnisse komplizierter psychophysiologischer Vorgänge Aufschlüsse zu geben vermag, und es kann daher keinem Zweifel unterliegen, daß sie künftig eine bedeutende Rolle bei psychologischen Untersuchungen spielen wird. Wir gehen deshalb etwas näher auf die theoretische Begründung und die praktische Anwendung dieser Methode ein.

Wie kompliziert die zentralen Vorgänge auch sein mögen, befolgen sie doch jedenfalls die allgemeinen Energiegesetze. Psychophysiologische Vorgänge können, wie alle anderen

[1]) R. Vogt, Über Ablenkbarkeit und Gewöhnungsfähigkeit. Kraepelin, Psych. Arb. III S. 62 u. f. Lehmann, Körperliche Äußerungen psychischer Zustände, II S. 197—237. Elemente der Psychodynamik, S. 339—351.

Tätigkeiten, nur auf Kosten anderer Energieformen — im vorliegenden Falle auf Kosten der chemischen Energie des Gehirns — zustande kommen. Hieraus folgt, daß zwei gleichzeitige Prozesse, die durch Transformation einer gegebenen Energiemenge entstehen, sich gegenseitig hemmen müssen. Es seien $1/p$ der Bruchteil der disponiblen Energie, der von dem Vorgange A verbraucht wird, wenn dieser allein stattfindet, und $1/q$ der Bruchteil, welcher vom Vorgange B unter derselben Bedingung verbraucht wird. Verlaufen die beiden Vorgänge gleichzeitig, so reduzieren sich die transformierten Energiemengen auf $1/P$ resp. $1/Q$, wo:

$$\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{P}}{\frac{1}{p}}=\frac{1}{Q} \; \ldots . (\text{Gleich. 46a}) \text{ und } \frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{Q}}{\frac{1}{q}}=\frac{1}{P} \; \ldots . (\text{Gleich. 46b})$$

oder mit Worten: die relative Verminderung der bei jedem Vorgang transformierten Energiemenge ist gleich dem Bruchteile der Energie, der tatsächlich zur anderen, gleichzeitigen Arbeit verbraucht wird. Eliminiert man aus den beiden Gleichungen z. B. $1/P$, so erhält man:

$$\frac{1}{Q}=\frac{\frac{1}{q}\left(1-\frac{1}{p}\right)}{1-\frac{1}{pq}}.$$

Setzt man hier $1/p=0$, so wird $1/Q=1/q$. Wenn also nur die während des Vorganges A transformierte Energiemenge $1/p$ recht klein ist, wird die relative Verminderung $\frac{1}{Q}$ dieser Arbeit, Gleich. 46a zufolge, ein Maß der anderen, gleichzeitigen Tätigkeit, B. Es dreht sich also nur darum, auf irgendeine Weise das Verhältnis der Größen $1/p$ und $1/P$ zu bestimmen.

Die im Zentralorgane transformierten Energiemengen, $1/p$ und $1/P$, können wir selbstverständlich nicht messen; die hierdurch geleisteten äußeren Arbeiten, A_s resp. A_r, sind aber der Messung zugänglich und können fast immer, dem Gesetze der konstanten Proportionen zufolge, den transformierten zentralen Energiemengen proportional gesetzt werden. Das Verhältnis zwischen $1/P$ und $1/p$ ist folglich gleich A_r/A_s; Gleich. 46a kann somit auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{A_s-A_r}{A_s}=\frac{1}{Q} \; \ldots \ldots \ldots \; (\text{Gleich. 47}).$$

Um mittels der Hemmung die Größe verschiedener Tätigkeiten, B_1, B_2 usw., zu messen, wählt man am besten, der obigen Betrachtung zufolge, zum reagierenden, gehemmten Vorgang A eine leichte Arbeit, die ihrerseits die möglichst geringe Hemmung auf B ausübt. Welche Arbeit hier gewählt wird, ist an und für sich gleichgültig, weil wir überhaupt nur relative Maße erhalten. Soll die Herabsetzung aber wirklich ein Maß der verschiedenen Tätigkeiten B sein, so ist darauf zu achten, daß es faktisch stets derselbe Vorgang A ist, der durch die Hemmung beeinflußt wird. In dieser Beziehung kann man sich sehr leicht täuschen; es kommt häufig vor, daß z. B. auditiv-motorisch ausgeführte Arbeiten, solange sie ungehemmt bleiben, ins visuelle Gebiet verlegt werden, wenn eine andere auditiv-motorische Tätigkeit sie stört — und folglich sind es gar nicht mehr die nämlichen Vorgänge. Auch die hemmenden Tätigkeiten B dürfen nur intensiv verschieden sein, wenn sie durch die Herabsetzung der reagierenden Arbeit gemessen werden sollen. Der Hemmungstheorie zufolge wird die Hemmung zweier Vorgänge nämlich um so kleiner, je weniger die Hemmungsgebiete sich decken[1]). Da aber verschiedenartige zentrale Vorgänge zweifelsohne auch verschiedene Zentren in Anspruch nehmen, verändert sich also mit der Art des Vorganges auch das Hemmungsgebiet, und die für verschiedene Vorgänge gefundenen Werte $1/Q$ sind folglich nicht ausschließlich von der Größe der transformierten Energiemenge abhängig. Was wir hier aus der Theorie folgern, wird, wie im folgenden zu ersehen, durch die Erfahrung bestätigt: die relative Verminderung der reagierenden Tätigkeit kann nur dann als ein relatives Maß der hemmenden Vorgänge angesehen werden, wenn erstere konstant und die letzteren nur intensiv verschieden sind.

Durch Übung, durch häufige Wiederholung derselben Arbeit, wird diese immer leichter, mit geringerer Mühe und, aller Wahrscheinlichkeit nach, daher auch mit geringerem Energieaufwand ausgeführt, indem die arbeitenden Neuronen sich dieser speziellen Arbeit anpassen. Kommt aber eine bestimmte Tätigkeit B durch Übung mit abnehmendem Aufwand von Energie zustande, so wird sie eine konstante Arbeit A auch nur weniger hemmen. Wir dürfen also erwarten, daß die häufige Wiederholung derartiger Messungen für kon-

[1]) Elemente der Psychodynamik, S. 28—33.

stante Tätigkeiten abnehmende Werte $1/Q$ ergeben werden; dies bestätigt denn auch die Erfahrung, wie wir sogleich sehen werden.

Die Berechnung der Werte $1/Q$ erfordert nicht nur die Bestimmung der während der Störung tatsächlich ausgeführten Arbeit, A_r, die keine Schwierigkeit bereiten kann, sondern auch die Bestimmung derjenigen Arbeitsmenge, A_s, die ohne gleichzeitige Störung geleistet werden könnte. Um letztere Größe zu bestimmen, ist besonders auszumessen, wie die reagierende Arbeit wegen der Ermüdung mit der Zeit abnimmt. Nehmen wir nämlich an, daß wir an einem Tage die Leistung ohne Hemmungsarbeit, A_s, am folgenden Tage die Leistung mit gleichzeitiger Hemmungsarbeit, A_r, und die Herabsetzung als die Differenz dieser beiden Größen bestimmten, so würden wir wahrscheinlich ein ganz falsches Resultat finden. Die Disposition schwankt nämlich von Tag zu Tage, und nichts verbürgt uns, daß die Versuchsperson heute unter denselben Umständen genau dieselbe Arbeitsmenge wie gestern leisten kann. Folglich muß die Disposition bekannt sein. Fängt man aber damit an, die Größe der Leistung in einer bestimmten Zeit ohne gleichzeitige Hemmungsarbeit zu messen, so ermüdet schon dadurch die Versuchsperson ein wenig und wird in der folgenden ebenso lange Zeit nicht dieselbe Arbeit liefern können. Man muß folglich durch besondere Versuche die geleistete Menge der reagierenden Arbeit als Funktion der Zeit bestimmen. Wird z. B. eine Stunde gearbeitet, so kann man das Verhältnis zwischen den Leistungen der zweiten und der ersten halben Stunde feststellen; es sei dies Verhältnis b. Wird nun an anderen Tagen in der ersten halben Stunde ohne Hemmungsarbeit, in der zweiten halben Stunde mit Hemmungsarbeit gearbeitet, so ist A_r einfach durch letztere Leistung bestimmt, während A_s als das Produkt aus b und der Leistung der ersten halben Stunde berechnet werden kann. Diese Methode zur Bestimmung der „Arbeitskurve" ist zwar nicht sehr genau, wird aber in den meisten Fällen genügen. Eine erheblich größere Genauigkeit ist aber leicht durch ein besonderes Interpolationsverfahren zu erzielen, wie wir später durch ein Beispiel nachweisen werden.

In der auf diesem Gebiete einschlägigen Arbeit R. Vogts findet sich eine Fülle von Untersuchungen, welche die obigen, aus der Theorie abgeleiteten Sätze bestätigen. Vogt hat die gegenseitige Beeinflussung sehr verschiedener, reagierender

und hemmender Arbeiten untersucht: aus diesem großen Material ziehe ich vorläufig ein einzelnes Beispiel hervor. Die reagierende Arbeit war hier die Addition fortlaufender Zahlenreihen. Ohne Niederschreiben der Summenzahlen wurden reihenweise einstellige Zahlen bis zu 100 addiert, und mit der Endziffer der letzten Summenzahl wurde dann eine neue Reihe angefangen. Als hemmende oder störende Arbeiten wurden verschiedene untersucht; wir betrachten hier nur deren zwei, für welche die ausführlichsten Versuchsreihen vorliegen. In einer Reihe wurde auf Metronomschläge (19 in der Minute) reagiert, indem bei jedem Schlage ein Punkt in der zu addierenden Zahlenreihe gesetzt wurde: die R-Arbeit. In einer anderen Reihe wurde außerdem bei jedem vierten Metronomschlag ein Kreuz gesetzt; diese Arbeit war also bedeutend komplizierter, indem eine Gedächtnisleistung hinzukam: die $R+G$-Arbeit. Die Größe der geleisteten reagierenden Arbeit wurde durch die Anzahl der in einer halben Stunde ausgeführten Additionen gemessen. Die tatsächlich, während der Störung ausgeführte Arbeit kann einfach aufgezählt werden; die Arbeit, die ohne Störung ausgeführt werden könnte, wurde als 0,92 der in der ersten halben Stunde geleisteten Arbeit berechnet, was durch besondere Versuche festgestellt war. Nach Gleich. 47 können somit die Werte $1/Q$ leicht berechnet werden; die an verschiedenen Tagen gefundenen Resultate[1]) sind in Tab. 24 in Nummerordnung angeführt:

Tabelle 24.

R:	0,245	0,209	0,150	0,153	0,167	0,109	0,127
$R+G$:	0,370	0,311	0,264	0,344	0,263	0,275	

Aus diesen Zahlen geht erstens hervor, daß die schwierigere Arbeit $R+G$ eine größere Herabsetzung der reagierenden Arbeit herbeigeführt hat als die leichtere R. Zweitens ist ersichtlich, daß die Werte als Konstanten angesehen werden dürfen, weil die Schwankungen nicht größer sind, als sie bei derartigen schwierigen Untersuchungen zu erwarten waren. Schließlich zeigen die Werte jeder Reihe bei wachsender Übung eine abnehmende Tendenz. Die Erfahrung bestätigt also an diesen Punkten die Konsequenzen der Theorie. Außer

[1]) A. a. O. S. 102, Tab. XVIII. Vogt gibt nicht die relative Verminderung, sondern das prozentige Verhältnis z der während der Störung geleisteten Arbeit A_r zu dem ohne Störung zu erwartenden Werte A_s an; also $z = 100\, A_r/A_s$. Aus diesen Prozentzahlen erhält man die oben angegebenen Werte $1/Q$, indem $1/Q = 1 - z/100$; vgl. Gleich. 47.

der fortlaufenden Addition hat Vogt noch viel andere reagierende Arbeiten benutzt: die Addition je zweier einstelliger Zahlen mit Niederschreiben des Resultates, das Auswendiglernen zwölfstelliger Zahlen oder zwölfgliedriger Silbenreihen. Als hemmende Arbeiten kamen ebenfalls verschiedene zur Anwendung, besonders, außer den schon besprochenen, das Hersagen eines auswendig gelernten Gedichtes. Die Untersuchung der gegenseitigen Beeinflussung dieser verschiedenen Tätigkeiten hat viele sowohl in praktischer als theoretischer Beziehung interessante Resultate ergeben. Quantitative Gesetze lassen sich aber kaum aus diesem Material ableiten, weil die Resultate nicht direkt vergleichbar sind, indem die reagierenden Arbeiten nicht ausschließlich quantitativ von den Störungsarbeiten beeinflußt werden. Ein paar Beispiele werden die Sache erläutern. Die fortlaufende Addition wurde durch das Hersagen eines Gedichtes so gehemmt, daß im Mittel $1/Q = 0{,}604$ gefunden wurde; es wurden also während der Störung nur 40 % der ohne Störung geleisteten Arbeit ausgeführt. Auf die Addition je zweier Zahlen mit Niederschreiben des Resultates hatte das Hersagen eines Gedichtes dagegen den Einfluß, daß $1/Q = -0{,}014$ gefunden wurde; mit anderen Worten: die Arbeit wurde eher gefördert als gehemmt. Die Erklärung ist ganz einfach. Die Addition wird von der betreffenden Versuchsperson unter gewöhnlichen Umständen auditiv-motorisch, mittels der Sprechklangbilder, ausgeführt. Das leise Hersagen eines Gedichtes nimmt aber dieselben Zentren in Anspruch und stört dadurch die auszuführende Addition so sehr, daß sie gar nicht zustande kommen kann. Die Addition wurde daher, was sich durch Selbstbeobachtung leicht konstatieren ließ, visuell ausgeführt; die fortlaufende Addition konnte aber auf diese ungewöhnliche Weise nur mit Mühe ausgeführt werden, weil die partiellen Resultate sich nicht visuell festhalten ließen. Das Addieren zweier einstelliger Zahlen mit sofortigem Niederschreiben des Resultates konnte dagegen visuell so leicht vonstatten gehen, daß es durch gleichzeitiges Hersagen gar nicht gestört wurde.

Das Auswendiglernen von Zahlenreihen wurde auch von der betreffenden Versuchsperson unter normalen Verhältnissen auditiv-motorisch ausgeführt und folglich durch das Hersagen eines Gedichtes so stark gehemmt, daß es nur visuell zustande kommen konnte; es war dann $1/Q = 0{,}737$. Die früher besprochene Hemmungsarbeit $R + G$ störte dagegen viel weniger

das Zahlenlernen, indem $1/Q = 0{,}598$ gefunden wurde, obschon die Arbeit $R+G$ eine kompliziertere Leistung als das fast mechanische Hersagen eines Gedichtes war. Aus diesen verschiedenen Tatsachen geht hervor, daß quantitative Bestimmungen nach dieser Methode nur dann ein Maß der psychischen Tätigkeiten geben können, wenn der reagierende Vorgang stets, ohne Rücksicht auf die gleichzeitige Hemmungsarbeit, konstanter Art ist, in demselben Zentrum verläuft. Um die verschiedenen interessanten Fragen, die Vogt erhoben hat, sicher beantworten zu können, wird es daher unzweifelhaft notwendig, zur reagierenden Arbeit einen solchen zentralen Vorgang zu wählen, der sich nicht, willkürlich oder unwillkürlich, in ein anderes Zentrum verschieben läßt. Aus diesem Grunde habe ich es vorgezogen, zur reagierenden Arbeit die willkkürliche Muskelbewegung zu wählen, weil die motorischen Zentren der Fingerbewegungen unter normalen Umständen wohl nie von den eigentlichen psychischen Tätigkeiten in Anspruch genommen werden.

Am besten eignet sich für derartige Untersuchungen ein Federergograph, der bei richtig gewähltem Tempo unendliche Ergogramme liefert. Das Tempo darf weder zu schnell sein, um nicht unnötig zu ermüden, noch zu langsam, weil dann die auszuführende psychische Arbeit größtenteils in den leeren Intervallen geleistet wird; 40 Hebungen pro Minute werden fast von allen Versuchspersonen als ein passendes Tempo befunden. Da ein Ergogramm eine kontinuierte, gesetzmäßig variierende Kurve darstellt, läßt sich die Arbeit A_n, die ohne Hemmung geliefert sein könnte, leicht berechnen, wenn man nur vor und nach der Störung eine gewisse Anzahl, z. B. 25, Hebungen ohne Störung ausführt. Die Arbeitskurve ist dadurch vollständig bestimmt und kann exakt berechnet werden. Ich gebe hier die Methode an einem Beispiele an.

Fig. 14 stellt ein Ergogramm dar, das beim Auswendiglernen einer Reihe von zehn sinnlosen Silben erschien. Die Hebungen sind im Takte 40 pro Min. ausgeführt; bei jeder Hebung wurden zwei Silben gelesen, und nach zehn Wiederholungen war die Reihe erlernt, worauf sie in demselben Takte hergesagt wurde. Es sind also im ganzen 55 Hebungen, die von der Störungsarbeit beeinflufst wurden; vor und nach dieser Arbeit wurden je 25 Hebungen ausgeführt. Um den wahrscheinlichen Verlauf des ungestörten Ergogramms zu berechnen, kann man folgendermafsen verfahren. Die Mittelwerte aus je fünf Hebungen werden berechnet; in der Tab. 25 sind sie in der Kolumne y angegeben. Denkt man sich diese Mittelwerte in der Mitte jeder Gruppe abgesetzt, so entsprechen

sie also als Ordinaten den Abszissen 3, 8, 13 usw., die in Tab. 25 unter x angeführt sind; $D.\,x$ sind die Differenzen dieser Abszissen. Da die durch die Ordinatenwerte y bestimmte Kurve keine vollständig glatte ist, kann man die y-Werte auf gewöhnliche Weise

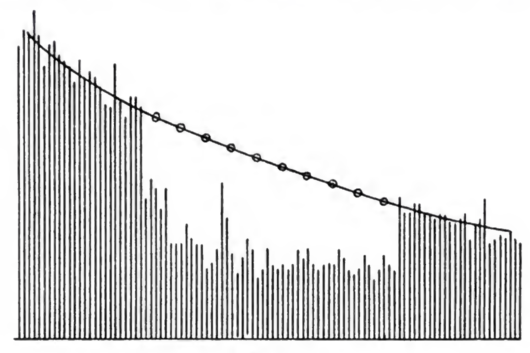


Fig. 14.

ausgleichen, wobei am bequemsten die Werte vor und nach der Störung getrennt behandelt werden; die einmal ausgeglichenen Werte sind unter (y) angeführt. Das unbekannte mittlere Stück

Tabelle 25.

x	$D.x$	y	(y)	δ^{I}	δ^{II}	x	A_s	A_r	$\frac{1}{Q}$
3	5	60,8	60,8			28	44,4	29,2	0,343
8	5	56,4	56,6			33	42,5	20,0	0,530
13	5	53,0	52,7			38	40,4	17,0	0,579
18	5	49,6	49,3	— 0,600		43	38,3	20,2	0,473
23	55	46,6	46,3	— 0,368	0,0039	48	36,4	16,4	0,549
78	5	26,4	26,1	— 0,340	0,0005	53	34,5	14,6	0,576
83	5	24,8	24,4			58	32,6	16,2	0,504
88	5	23,0	23,5			63	30,8	15,8	0,487
93	5	22,8	22,6			68	29,1	14,6	0,498
98		20,2	21,2			73	27,2	14,4	0,470

der Kurve läfst sich jetzt interpolieren, zu welchem Zweck die dividierten Differenzen berechnet werden müssen; schon δ^{III} wird aber hier so klein, dafs sie keine Bedeutung erhält. Gleich. 16 zufolge ist also der unbekannte Teil der Kurve mittels folgender Gleichung zu berechnen:

$$y = 46{,}3 - (x - 23) \cdot 0{,}368 + (x - 23) \cdot (x - 78) \cdot 0{,}0005.$$

Setzt man hier nach und nach $x = 28$, 33, 38 usw., so erhält man die entsprechenden Werte y, die in Tab. 25 unter A_x aufgeführt sind. In der Fig. 14 sind die dadurch bestimmten Punkte durch kleine Zirkel markiert; diese Punkte nebst den Endpunkten der Ordinaten (y) bestimmen die eingezeichnete Kurve. Um $1/Q$ zu berechnen, braucht man nur noch die während der Störung ausgeführten Arbeiten zu messen; die mittleren Werte von je fünf Hebungen finden sich in Tab. 25 unter A_r. Nach Gleich. 47 läfst sich dann schliefslich $1/Q$ berechnen.

Die hier dargelegte Methode läßt sich selbstverständlich auf alle anderen Arbeiten übertragen, wenn nur vor und nach der Hemmungsarbeit genügend lange Zeit ohne Störung gearbeitet und dafür Sorge getragen wird, daß die in bestimmten kleineren Zeitstrecken geleisteten Arbeitsmengen berechnet werden können. Die Methode hat vor der früher besprochenen, von Vogt angewandten, mehrere Vorzüge. Erstens braucht man nicht durch besondere Versuche den wahrscheinlichen Verlauf der Arbeitskurve zu bestimmen; folglich wird Zeit erspart. Zweitens ist die Methode genauer, weil die Arbeitskurve an verschiedenen Tagen durchaus nicht die nämliche Form zu haben braucht; die Vogtsche Methode kann daher nur ziemlich rohe, durchschnittliche Werte liefern. Drittens wird das Versuchsmaterial ökonomischer ausgenutzt, indem der Wert $1/Q$ nicht nur summarisch, sondern auch für kleinere

Tabelle 26.

Zeit	$R + G \cdot 18/V$				$R + G \cdot 20/V$			
	y	(y)	A_x	$\frac{1}{Q}$	y	(y)	A_x	$\frac{1}{Q}$
1	427				452			
2	405	407			444	434		
3	389	388			397	411		
4	366	373			405	400		
5	369	371			390	385		
6	377				353			
7	248		355	0,301	264		377	0,300
8	271		350	0,226	308		372	0,172
9	238		345	0,310	295		370	0,203
10	231	A_r	341	0,322	273	A_r	367	0,256
11	249		337	0,261	270		365	0,260
12	255		333	0,234	259		362	0,285
13	344				387			
14	321	325			345	359		
15	315				360			

Fraktionen der Arbeit berechnet werden kann, wodurch die Genauigkeit der Messungen sich bestimmen läßt. Da Vogt für seine Hauptversuche das zu einer solchen Berechnung nötige Material angegeben hat, werde ich die Sache hier durch einige Beispiele erläutern.

In Tab. 26 sind die Resultate zweier Versuchsreihen Vogts angegeben[1]). Reagierende Arbeit war hier die fortlaufende Addition, als Störung diente die Arbeit $R+G$. Es wurde zuerst eine halbe Stunde ohne Störung, dann eine halbe Stunde mit Störung, und schliefslich noch eine Viertelstunde ohne Störung gearbeitet. In der ersten Kolumne ist die Zeit angeführt, als deren Einheit 5 Min. genommen sind, und unter y die in jeder Versuchsreihe pro 5 Min. geleistete Arbeit. Die Werte, die in der Zeit 7—12 erhalten wurden, sind die während der Störung geleisteten Arbeiten, also A_r. Die ohne Störung erhaltenen Werte schwanken recht bedeutend, was am besten aus der Fig. 15 ersichtlich ist, wo die Werte der Versuchsreihe vom 18./V. durch Kreuze, diejenigen der Reihe vom 20./V. durch Zirkel bezeichnet sind. Wegen dieser grofsen Unregelmäfsigkeit sind die Werte nach Gleich. 25 einmal ausgeglichen; die Resultate sind unter (y) angeführt. Da wir am Ende der Reihen zu wenige Werte haben, um den fehlenden Teil jeder Kurve zu berechnen, sind die Kurven durch die Endpunkte der Ordinaten (y) hindurch gezeichnet, eine Methode, die hinsichtlich der Genauigkeit nicht viel hinter der Berechnung zurücksteht. Werden die Kurven in gröfserem Mafsstabe auf quadriertes Papier gezeichnet, so sind die den Abszissen 7—12 entsprechenden Ordinaten leicht abzulesen; diese Werte sind unter A_s angegeben. Gleich. 47 zufolge kann dann $1/Q$ berechnet werden. Als Mittel ergibt sich für die erste Versuchsreihe $1/Q = 0,276$ mit dem durchschnittlichen Fehler $\pm 0,035$ (Vogt findet $1/Q = 0,311$), und für die zweite $1/Q = 0,246 \pm 0,039$ (Vogt hat $1/Q = 0,264$). Wir gewinnen also erstens auf diesem Wege ein Mafs der Genauigkeit, und zweitens sind die Werte $1/Q$ unzweifelhaft genauer, als die von Vogt berechneten. Die Fig. 15 zeigt nämlich, dafs die Arbeitskurven der verschiedenen Tage durchaus nicht dieselbe Form haben, und folglich kann A_s nicht als ein konstanter Bruchteil der Arbeit der ersten halben Stunde bestimmt werden.

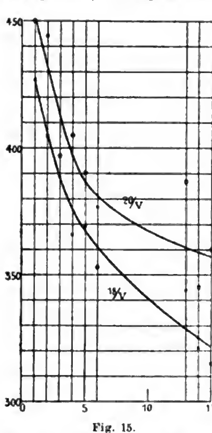


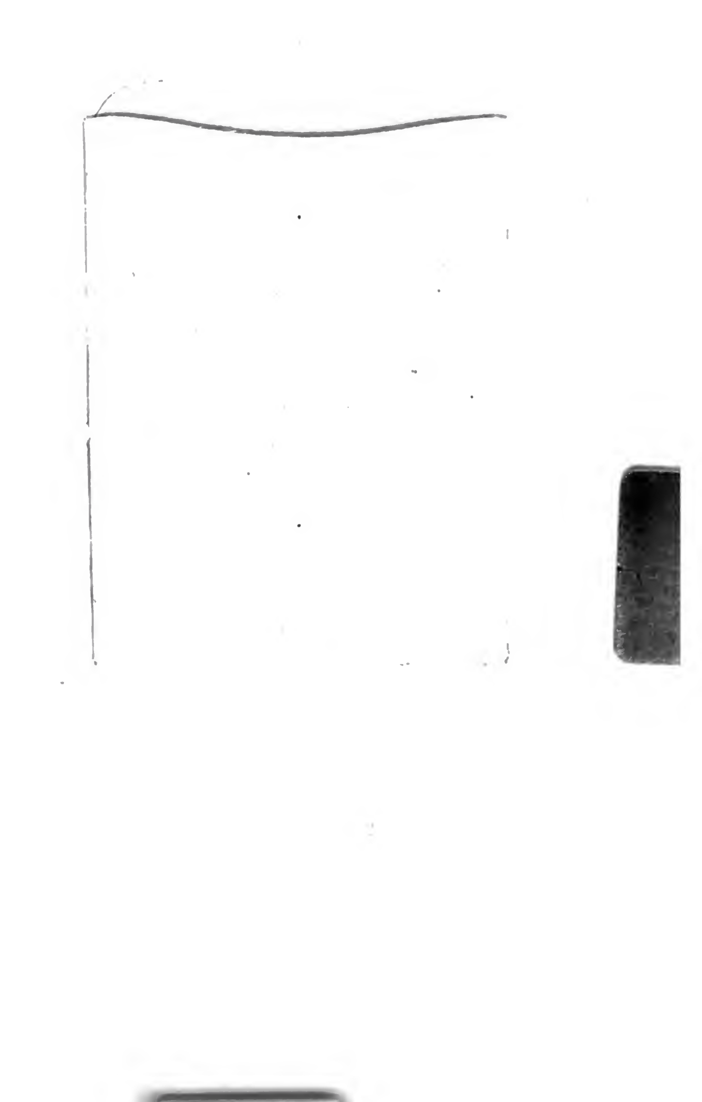
Fig. 15.

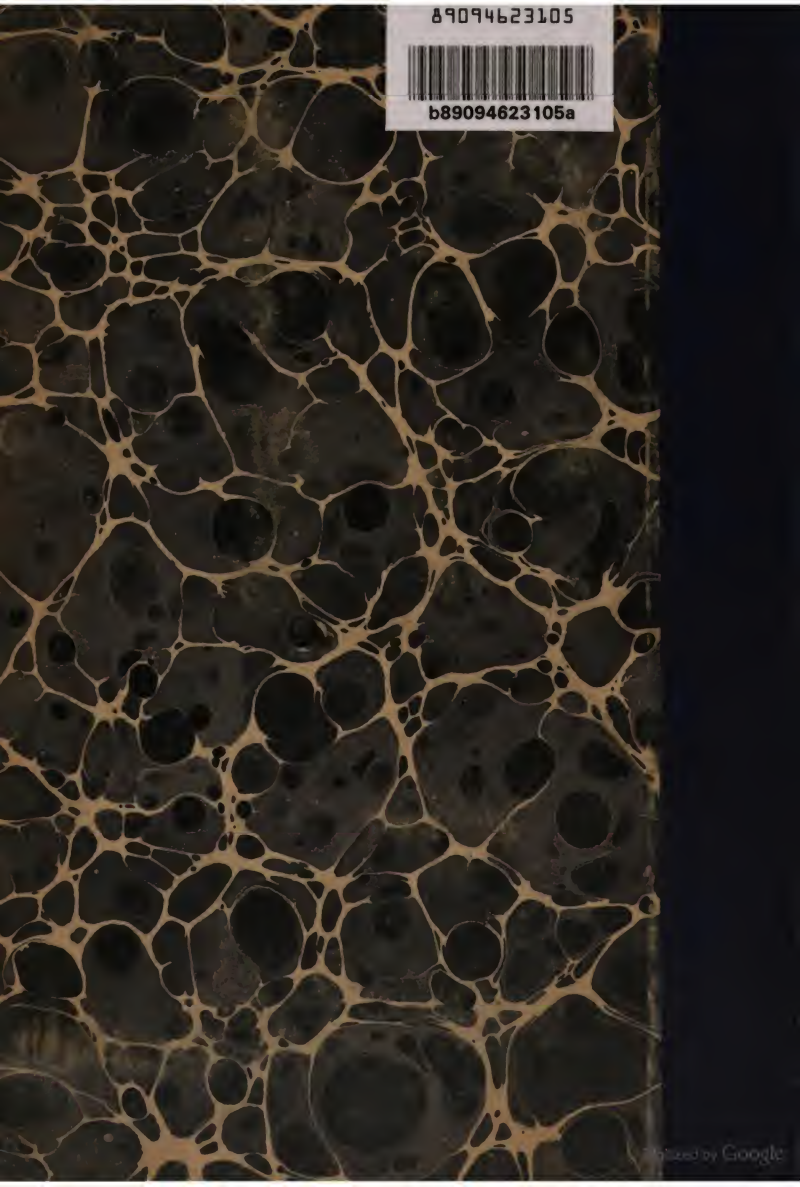
[1]) A. a. O. S. 92, Tab. XI.

Die Energiemessungen, die sich mit derselben Genauigkeit wie die sogenannten psychophysischen Messungen ausführen lassen, und die uns einen tiefen Einblick in die quantitativen Verhältnisse der komplizierteren psychischen Vorgänge gewähren, verdienen zweifelsohne eine weit größere Beachtung, als ihnen bisher zuteil geworden ist.

Altenburg
Pierer'sche Hofbuchdruckerei
Stephan Geibel & Co.






89094623105
b89094623105a
Digitized by Google